Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

Н. В. ЕФИМОВ

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

Н. В. ЕФИМОВ

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.1
Е 91
УДК 512.83 + 512.897:513.5(075.8)

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{19\text{-}67}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является дополнением нашего «Краткого курса аналитической геометрии».

Книга состоит из трех глав. Первая глава посвящена приведению к каноническому виду общего уравнения линии второго порядка. Изложение этой главы построено преимущественно в алгебраическом плане. Векторное исчисление в этой главе не употребляется (используется только понятие вектора как направленного отрезка и проекции вектора на оси координат). Решение основной задачи общей теории линий второго порядка изложено с расчетом, чтобы метод непосредственно обобщался по размерности. Таким образом, сущность дела в полной мере разъясняется на двумерном случае. Соответственно этому вторая глава, посвященная приведению к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка, по своей схеме совершенно аналогична первой.

Третья глава имеет своим предметом линейные преобразования и матрицы. И здесь основные вопросы прежде всего излагаются в двумерном случае с последующим обобщением на трехмерное пространство. В конце главы рассматривается приведение к каноническому виду квадратичных форм и устанавливается связь этого вопроса с теорией линий и поверхностей второго порядка. Третья глава написана соответственно требованиям по элементам линейной алгебры новой программы курса математики высших технических учебных заведений. Изложение последней главы не зависит от двух первых глав.

Н. Ефимов

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Преобразование координат на плоскости

1. Вспомним формулы преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости.

1) Если новые оси получаются параллельным переносом старых осей на величину a в направлении оси Ox и на величину b в направлении оси Oy, то

$$x = x' + a, \quad y = y' + b; \tag{1}$$

здесь $(x;\ y)$ — старые координаты произвольной точки, $(x';\ y')$ — новые координаты той же точки.

2) Если новые оси получаются поворотом старых осей на угол α вокруг неподвижного начала координат, то

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти формулы будут применяться в ближайших параграфах для упрощения общего уравнения кривой второго порядка. Следует иметь в виду, что формулы (1) и (2) справедливы при условии, что для новой системы координат сохраняется прежний масштаб.

2. Чтобы облегчить дальнейшее употребление формул (2), запишем их более компактно:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y', \\ y &= m_1 x' + m_2 y'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Иначе говоря, мы ввели обозначения коэффициентов формул (2):

$$l_1 = \cos\alpha, \quad m_1 = \sin\alpha, \quad l_2 = -\sin\alpha, \quad m_2 = \cos\alpha.$$

Заметим, что пара коэффициентов l_1, m_1 допускает простое геометрическое истолкование. Именно, если мы отложим на новой оси Ox' отрезок длины $=1$, направленный из начала координат в положительную сторону этой оси, т. е. единичный вектор направления Ox', то проекции этого вектора на старые координатные оси будут: $l_1 = \cos\alpha$, $m_1 = \sin\alpha$. Таким образом,

$$\{l_1;\ m_1\} = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\} \tag{4}$$

есть единичный вектор, определяющий направление новой оси абсцисс. Аналогично

$$\{l_2;\ m_2\} = \{-\sin\alpha;\ \cos\alpha\} = \\ = \left\{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right);\quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{5}$$

есть единичный вектор, определяющий направление новой оси ординат (рис. 1).

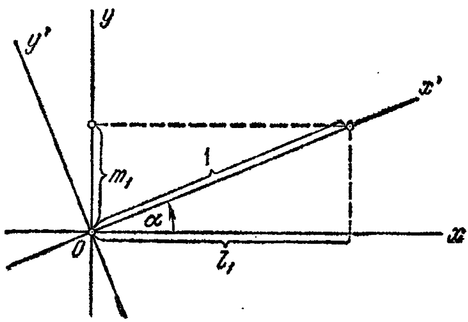

Рис. 1.

3. Формулы (2) выражают старые координаты произвольной точки через ее новые координаты. Часто требуются обратные формулы, выражающие новые координаты через старые. Чтобы найти их, заметим, что новая система осей получается поворотом старой на угол α; в свою очередь старые оси можно получить поворотом новых на угол $-\alpha$. Поэтому мы можем в формулах (2) поменять ролями старые и новые координаты, одновременно заменяя α на $-\alpha$, отсюда

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

так как $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$. Если применить введенные выше обозначения, то получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x+m_1y, \\ y' &= l_2x+m_2y. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

4. Коэффициенты l_1, m_1, l_2, m_2 формул (3) удовлетворяют следующим условиям:

$$l_1^2+m_1^2=1, \quad l_2^2+m_2^2=1, \tag{7}$$

$$l_1l_2+m_1m_2=0, \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}=1. \tag{9}$$

Эти равенства непосредственно усматриваются из (4) и (5). Соотношения (7), (8), (9) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями того, что формулы (3) выражают преобразования прямоугольных координат при некотором повороте системы осей (с неизменным масштабом). В самом деле, допустим, что нам дана система прямоугольных координат с осями Ox, Oy и даны формулы (3) с какими-то коэффициентами l_1, m_1, l_2, m_2. Если соблюдены условия (7), то найдутся угол α и угол β такие, что

$$\{l_1;\ m_1\}=\{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}, \quad \{l_2;\ m_2\}=\{\cos\beta;\ \sin\beta\}.$$

Если соблюдено также равенство (8), то

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta-\alpha)=0.$$

Таким образом, равенство (8) гарантирует перпендикулярность векторов $\{l_1;\ m_1\}$ и $\{l_2;\ m_2\}$. Так как $\cos(\beta-\alpha)=0$, то либо $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$, либо $\beta=\alpha+\frac{3\pi}{2}$. Соответственно, имеем:

$$\text{либо } \{l_2;\ m_2\}=\{-\sin\alpha;\ \ \cos\alpha\},$$
$$\text{либо } \{l_2;\ m_2\}=\{\ \sin\alpha;\ -\cos\alpha\}.$$

Если соблюдено (9), то второе предположение отпадает и мы получаем $\{l_2;\ m_2\}=\{-\sin\alpha;\ \cos\alpha\}$. Вместе с тем формулы (3) сводятся к формулам (2). Значит, при соблюдении условий (7), (8), (9) мы действительно имеем переход к новой, также прямоугольной системе координат с тем же масштабом; при этом обе оси поворачиваются на один и тот же угол в одну и ту же сторону.

5. Рассмотрим теперь преобразование прямоугольных координат, при котором ось Ox' получается поворотом оси Ox на угол α, а ось Oy' получается поворотом оси Oy на угол $\alpha+\pi$ (рис. 2). Такое преобразование *нарушает ориентацию осей*: если кратчайший поворот оси Ox к оси Oy совершается против часовой стрелки, то кратчайший поворот оси Ox' к оси Oy' идет по ходу часов. В этом случае старые и новые координаты связаны формулами:

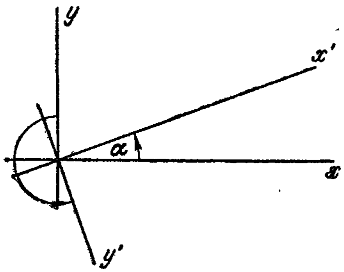

Рис. 2.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Чтобы убедиться в справедливости этих формул, будем рассуждать так: данное преобразование можно осуществить в два этапа, поворачивая сначала обе оси на угол α, затем меняя направление повернутой оси ординат на противоположное. Значит, нужно написать формулы (2), затем изменить знаки перед членами, которые содержат y'. Таким образом мы и получим (10). Формулы (10) можно написать в виде формул (3), если считать

$$\{l_1;\ m_1\} = \{\cos\alpha;\quad \sin\alpha\},$$
$$\{l_2;\ m_2\} = \{\sin\alpha;\ -\cos\alpha\}.$$

Легко проверить, что и в этом случае соблюдаются условия (7), (8). Однако вместо (9) будем иметь

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = -1. \qquad (11)$$

Соотношения (7), (8), (11) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями того, что формулы (3) выражают преобразование прямоугольных координат, нарушающее ориентацию осей (для доказательства нужно повторить рассуждения, проведенные в n° 4, до того места, где устанавливается, что либо $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$, либо $\beta=\alpha+\frac{3\pi}{2}$; при условии (11) отпадает первая возможность).

Мы можем теперь сформулировать следующее утверждение: *если коэффициенты формул* (3) *удовлетворяют условиям* (7), (8), *то эти формулы выражают преобразование прямоугольных координат с неизменным масштабом* (и, конечно, с неизменным началом координат). Ориентация осей сохраняется или нарушается, в зависимости от того, будет ли соблюдено условие (9) или условие (11).

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнения линии второго порядка с центром в начале координат

6. Пусть дано уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=H. \tag{1}$$

Особенностью его является отсутствие членов первой степени относительно x, y. Этому соответствует известная особенность расположения линии второго порядка, которая задана уравнением (1). Именно, левая часть (1) не меняется при замене x, y на $-x$, $-y$; следовательно, если точка $M(x;\ y)$ лежит на линии (1), то точка $N(-x;\ -y)$ также лежит на этой линии. Иначе говоря, точки линии (1) расположены парами, симметрично относительно начала координат. Таким образом, если линия второго порядка задана уравнением вида (1), то а) она обладает центром (симметрии); б) начало координат помещено в центр.

7. Левая часть уравнения (1)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 \tag{2}$$

представляет собой однородный многочлен второй степени (т. е. многочлен, состоящий только из членов второй степени). Такой многочлен называют *квадратичной формой* от двух переменных x, y.

Мы будем сейчас заниматься задачей о приведении квадратичной формы (2) к каноническому виду. Сущность этой задачи в следующем: требуется повернуть координатные оси так, чтобы после приведения формы (2) к новым координатам исчез член с произведением новых текущих координат. Согласно § 1 дело сводится к тому, чтобы найти формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y', \\ y &= m_1 x' + m_2 y', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в силу которых имеет место тождество:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2. \tag{4}$$

Это значит, что после замены величин x, y по формулам (3) данная квадратичная форма должна принять вид, указанный в правой части (4) и называемый *каноническим видом* (в каноническом виде формы ее средний коэффициент равен нулю). Коэффициенты формул (3) надлежит подобрать так, чтобы соблюдались условия (7)—(9) § 1.

Если квадратичная форма (2) будет приведена к каноническому виду, то одновременно с нею получит канонический вид и уравнение (1). Вопрос о приведении к каноническому виду общего уравнения второй степени будет решен вообще в § 4. Здесь мы решим его для уравнения вида (1). Мы докажем, что каждую квадратичную форму (2), а вместе с тем каждое уравнение (1), можно привести к каноническому виду, и дадим простой способ искомого приведения.

8. Предположим сначала, что коэффициенты формул (3) уже найдены и тождество (4) достигнуто. Перепишем его следующим образом:

$$(Ax + By)\,x + (Bx + Cy)\,y = \lambda_1 x'x' + \lambda_2 y'y'. \tag{5}$$

Теперь каждую из скобок в левой части преобразуем по формулам (3):

$$\left.\begin{aligned} Ax + By &= (Al_1 + Bm_1)\,x' + (Al_2 + Bm_2)\,y', \\ Bx + Cy &= (Bl_1 + Cm_1)\,x' + (Bl_2 + Cm_2)\,y'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Используем, далее, обратные формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} x' &= l_1 x + m_1 y, \\ y' &= l_2 x + m_2 y; \end{aligned}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} x'x' &= (l_1 x + m_1 y)\,x', \\ y'y' &= (l_2 x + m_2 y)\,y'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Тождество (5) вследствие (6) и (7) принимает вид:

$$(Al_1+Bm_1)\,xx'+(Bl_1+Cm_1)\,yx'+(Al_2+Bm_2)\,xy'+$$
$$+(Bl_2+Cm_2)\,yy'=$$
$$=\lambda_1 l_1 xx'+\lambda_1 m_1 yx'+\lambda_2 l_2 xy'+\lambda_2 m_2 yy'. \quad (8)$$

В левой части (8) содержатся четыре различных члена; столько же аналогичных членов мы имеем в правой части (8). Тождество (8) будет соблюдено, если коэффициенты подобных членов слева и справа окажутся одинаковыми; одновременно будет соблюдено и тождество (4). Таким образом, для решения задачи достаточно подобрать коэффициенты формул (3) и числа λ_1, λ_2 так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} Al_1+Bm_1&=\lambda_1 l_1,\\ Bl_1+Cm_1&=\lambda_1 m_1\end{aligned}\right\};\quad \left.\begin{aligned} Al_2+Bm_2&=\lambda_2 l_2,\\ Bl_2+Cm_2&=\lambda_2 m_2.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Дело свелось к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Al+Bm&=\lambda l,\\ Bl+Cm&=\lambda m.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Задача будет завершена, если мы найдем два решения l_1, m_1, λ_1 и l_2, m_2, λ_2 системы (10), удовлетворяющих условиям (7)—(9) § 1.

9. Займемся системой (10). Перепишем ее следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda)\,l+Bm&=0,\\ Bl+(C-\lambda)\,m&=0.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad (12)$$

так как в противном случае мы не получим из системы (11) ничего, кроме $l=0$, $m=0$ (см. Курс, Приложение, § 1, n° 5)*). Развертывая определитель, напишем (12) в виде

$$\lambda^2-(A+C)\,\lambda+(AC-B^2)=0.$$

---

*) Здесь и далее идут ссылки на книгу автора «Краткий курс аналитической геометрии», изд. 6-е, Физматгиз, 1962 (и последующие стереотипные издания), которая будет именоваться просто Курсом.

Из этого квадратного уравнения мы найдем нужные нам значения $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$:

$$\lambda_{1,2}=\frac{A+C\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}.$$

Заметим, что

$$(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A-C)^2+4B^2\geqslant 0;$$

следовательно, уравнение (12) имеет только действительные корни.

Уравнение (12) называется *характеристическим уравнением* квадратичной формы (2); корни λ_1, λ_2 уравнения (12) называются *характеристическими числами* этой формы; они же получаются в качестве коэффициентов после приведения формы к каноническому виду.

Рассмотрим два возможных случая.

Первый случай. $(A-C)^2+4B^2>0$. При этом условии $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Если мы подставим $\lambda=\lambda_1$ в систему (11), то система (11) будет иметь ненулевое решение l, m. Построим вектор $\{l;\ m\}$. Направление этого вектора называется *главным направлением* данной формы, соответствующим характеристическому числу λ_1. Ясно, что вектор $\{l_1,\ m_1\}$, где $l_1=\mu l$, $m_1=\mu m$ (μ — какое-нибудь число $\neq 0$), также имеет главное направление.

Возьмем

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{l^2+m^2}};$$

тогда

$$l_1^2+m_1^2=1.$$

Такое решение l_1, m_1 системы (11) будем называть *нормированным*. Вектор $\{l_1;\ m_1\}$ является единичным вектором главного направления, которое соответствует числу λ_1. Аналогично, решая систему (11) при $\lambda=\lambda_2$ и нормируя решение, получим единичный вектор $\{l_2;\ m_2\}$. Этот вектор определяет другое главное направление данной квадратичной формы, соответствующее характеристическому числу λ_2. Докажем, что главные направления, соответствующие различным характеристическим числам λ_1, λ_2 ($\lambda_1\neq\lambda_2$), перпендикулярны друг к другу.

Для доказательства прежде всего заметим, что числа l_1, m_1, λ_1 и l_2, m_2, λ_2 удовлетворяют равенствам (9) (поскольку эти числа найдены из (11)).

Умножим первое и второе равенства левой группы (9) соответственно на l_2, m_2 и сложим их почленно; точно так же поступим с правой группой, используя l_1, m_1. Получим:

$$(Al_1+Bm_1)\,l_2+(Bl_1+Cm_1)\,m_2=\lambda_1\,(l_1l_2+m_1m_2),$$
$$(Al_2+Bm_2)\,l_1+(Bl_2+Cm_2)\,m_1=\lambda_2\,(l_1l_2+m_1m_2).$$

Раскрывая скобки, легко обнаружить, что слева в этих двух равенствах стоит одна и та же величина. Поэтому, вычитая почленно одно равенство из другого, найдем:

$$0=(\lambda_1-\lambda_2)\,(l_1l_2+m_1m_2).$$

Но $\lambda_1\neq\lambda_2$, следовательно,

$$l_1l_2+m_1m_2=0,$$

что и требовалось (см. n° 4).

Поставленная задача в рассматриваемом случае решена. В самом деле, так как по доказанному векторы, определяющие главные направления, перпендикулярны друг к другу, то мы можем направить по ним оси новой прямоугольной системы координат. Переходя к новым координатам по формулам (3) с найденными коэффициентами l_1, m_1, l_2, m_2, мы приведем данную квадратичную форму к каноническому виду; это ясно, поскольку равенства (9) соблюдены. Следует еще учесть условие (9) § 1. Но и его соблюсти нетрудно, умножая, в случае надобности, l_1, m_1 (или l_2, m_2) на -1.

Второй случай. $(A-C)^2+4B^2=0$. На этот раз $\lambda_1=\lambda_2$. Так как теперь нет надобности различать λ_1 и λ_2, будем писать просто λ. Очевидно также, что в данном случае $A=C$, $B=0$. Отсюда и из формулы решения квадратного уравнения (12) (приведена выше) находим

$$\lambda=A=C.$$

Если подставить это значение λ в систему (11), то все коэффициенты системы обратятся в нуль. Следовательно, система (11) будет состоять из тождеств и удовлетворяется любыми числами l, m. Таким образом, *если характеристические числа квадратичной формы совпадают, то любое направление* *является для такой формы главным.* Так как $A=C$, $B=0$, то данная форма уже имеет канонический вид

$$Ax^2+Ay^2$$

и ничего с ней делать не надо. Однако мы можем повернуть оси на любой угол, и форма при этом сохранит канонический вид.

10. Подводя итог изложенному, сформулируем следующее правило.

Для того чтобы привести данную квадратичную форму к каноническому виду, нужно решить уравнение (12) *и найти характеристические числа* λ_1, λ_2; *они и будут коэффициентами в каноническом виде формы. Координатные оси следует направить по главным направлениям формы. Если ось абсцисс направлена по первому главному направлению* (которое определяется системой (11) при $\lambda=\lambda_1$), *то* λ_1 *будет коэффициентом при квадрате абсциссы.*

Ясно, что тем самым дано также правило приведения к каноническому виду уравнения (1), поскольку его левая часть есть квадратичная форма.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение:

$$17x^2+12xy+8y^2=20.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Напишем его в развернутом виде:

$$\lambda^2-25\lambda+100=0.$$

Отсюда находим характеристические числа: $\lambda_1=20$, $\lambda_2=5$. Тем самым мы уже знаем каноническое уравнение:

$$20x'^2+5y'^2=20,$$

или

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Данная линия является эллипсом с полуосями $a=2$, $b=1$. Если нас, кроме того, интересует расположение линии, то мы должны найти преобразование координат, приводящее данное уравнение к каноническому виду. Напишем систему (11):

$$\left.\begin{aligned}(17-\lambda)\,l+6m=0,\\ 6l+(8-\lambda)\,m=0.\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Полагая здесь $\lambda=\lambda_1=20$, получим

$$-3l+6m=0,$$
$$6l-12m=0.$$

Фактически мы имеем здесь одно уравнение; в качестве его решения можно взять, например, $l=2$, $m=1$. Нормируя это решение, найдем: $l_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $m_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Полагая в системе (*) $\lambda=\lambda_2=5$, получим

$$12l+6m=0,$$
$$6l+3m=0.$$

Отсюда $l_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$, $m_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (знаки взяты так, чтобы соблюдалось условие (9) § 1). Переход к новым осям достигается поворотом на угол α, который определяется равенствами $\cos\alpha=l_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

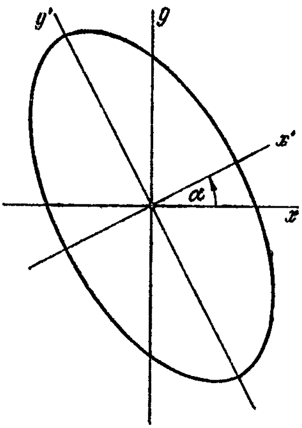

Рис. 3.

$\sin\alpha=m_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Проще построить этот угол по тангенсу:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1}{l_1}=\frac{1}{2}$$

(рис. 3). Формулы соответствующего преобразования координат напишем согласно (3):

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}.$$

В том, что эти формулы действительно дают тождество

$$17x^2+12xy+8y^2=20x'^2+5y'^2,$$

можно убедиться и непосредственной проверкой.

§ 3. Инварианты и классификация квадратичных форм от двух аргументов

11. В предыдущем параграфе мы указали определенный способ приведения данной квадратичной формы от двух аргументов к каноническому виду. Естественно возникает вопрос: не может ли случиться, что с помощью какого-то другого преобразования прямоугольных координат данная квадратичная форма приведется к другому каноническому виду? Покажем, что этого не может быть. Иначе говоря, *каждая квадратичная форма имеет единственный канонический вид* (конечно, не считая возможности поменять ролями абсциссу и ординату). Следует оговориться, что единственность канонического вида формы имеет место при условии, что употребляются только прямоугольные координатные системы с одним и тем же масштабом.

Перейдем к доказательству нашего утверждения. Обозначим буквой Φ величину данной квадратичной формы:

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2. \tag{1}$$

В силу этого равенства каждой точке $M(x;\ y)$ сопоставляется определенное численное значение Φ; его называют значением данной формы в точке $M(x;\ y)$. Приведем данную форму к каноническому виду. Пусть λ_1, λ_2 — характеристические числа формы; предположим для определенности, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, и направим новую ось абсцисс по тому главному направлению, которое отвечает числу λ_1. Тогда значение Φ в точке M будет выражено равенством

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

где x', y' — новые координаты точки M. Так как $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, то

$$\lambda_1 (x'^2 + y'^2) \leqslant \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \leqslant \lambda_2 (x'^2 + y'^2).$$

Поскольку $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$, то такие же соотношения имеем и в старых координатах:

$$\lambda_1 (x^2 + y^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2 (x^2 + y^2).$$

Ограничим возможные положения точки M, требуя, чтобы она находилась на единичной окружности:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

При этом условии все возможные значения Φ (отвечающие любым положениям точки M на единичной окружности) заключены между λ_1 и λ_2, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2.$$

Найденные границы изменения Φ являются точными. Именно, если $x' = \pm 1$, $y' = 0$, то $\Phi = \lambda_1$; если $x' = 0$, $y' = \pm 1$, то $\Phi = \lambda_2$. Этим наше утверждение доказано. В самом деле, если данная форма в других координатах получит также канонический вид, но с другими коэффициентами, то, аналогично рассуждая, покажем, что эта же форма на той же единичной окружности имеет другие границы изменения, что невозможно.

12. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то единственной будет и та координатная система, в которой данная форма получает канонический вид (не считая возможности менять ролями положительные и отрицательные направления осей). Докажем это. Имея $\lambda_1 \neq \lambda_2$, будем считать $\lambda_1 < \lambda_2$ и вернемся к предыдущим соотношениям. Заметим, что в данном случае при $x' \neq 0$ будет

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 < \lambda_2 (x'^2 + y'^2) = \lambda_2,$$

т. е. при $x' \neq 0$ имеем

$$\Phi < \lambda_2.$$

Только в двух точках $x' = 0$, $y' = \pm 1$ получаем

$$\Phi = \lambda_2.$$

Таким образом, на единичной окружности есть единственная пара диаметрально противоположных точек, где Φ получает наибольшее значение. Именно через эти точки и проходит ось ординат той координатной системы, в которой форма имеет канонический вид. Тем самым единственность такой системы координат доказана.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то форма имеет канонический вид в любых прямоугольных координатах. В самом деле, обозначая $\lambda_1 = \lambda_2$ просто через λ, получим в некоторых координатах

$$\Phi = \lambda (x'^2 + y'^2).$$

Но если мы еще повернем координатные оси на любой угол и перейдем к другим координатам x'', y'', то $x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$, т. е. Φ сохраняет канонический вид. Это обстоятельство уже отмечалось в предыдущем параграфе.

13. Пусть дана произвольная квадратичная форма

$$\Phi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

и пусть совершается преобразование координат

$$x = l_1 x' + l_2 y',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y'$$

при любом повороте осей. Подставляя эти выражения x, y, приведем Φ к новым координатам:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

Поскольку квадратичные формы, написанные здесь слева и справа, преобразуются друг в друга, они приводятся к одному и тому же каноническому виду. Следовательно, обе эти формы имеют одни и те же характеристические числа λ_1, λ_2. Напишем для каждой из этих форм характеристическое уравнение (см. § 2):

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$
$$\lambda^2 - (A' + C')\lambda + (A'C' - B'^2) = 0.$$

Эти уравнения имеют одни и те же корни λ_1, λ_2, следовательно, не отличаются друг от друга. Таким образом,

$$A' + C' = A + C,$$
$$A'C' - B'^2 = AC - B^2$$

(хотя по отдельности A', B', C' не обязаны совпадать с A, B, C).

Мы видим, что величины $A + C$ и $AC - B^2$ не меняются при любом преобразовании формы к новым прямоугольным координатам; поэтому их называют *инвариантами* формы относительно преобразования прямоугольных координат.

Инвариант $AC - B^2$ называется дискриминантом квадратичной формы и обозначается обычно через δ:

$$\delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме Виета

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2,$$

где λ_1, λ_2 — характеристические числа данной формы.

14. Квадратичную форму будем называть *эллиптической*, если ее характеристические числа λ_1, λ_2 оба отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, *гиперболической*, если числа λ_1, λ_2 разных знаков, *параболической*, если одно из чисел λ_1, λ_2 равно нулю. Так как $\delta=\lambda_1\lambda_2$, то форма будет эллиптической, если $\delta>0$, гиперболической, если $\delta<0$, и параболической, если $\delta=0$.

Рассмотрим эллиптическую форму Φ; допустим, что ее характеристические числа положительны: $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Согласно n° 11 (считая $\lambda_1\leqslant\lambda_2$) имеют место неравенства:

$$\lambda_1(x^2+y^2)\leqslant\Phi\leqslant\lambda_2(x^2+y^2). \qquad (2)$$

Таким образом, в любой точке $M(x; y)$, не считая начала координат, величина $\Phi>0$. Такая форма называется *положительно определенной*. Если точка $M(x; y)$ обегает единичную окружность $x^2+y^2=1$, то положительно определенная форма изменяется в постоянных положительных границах:

$$\lambda_1\leqslant\Phi\leqslant\lambda_2.$$

Допустим, что $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ $(\lambda_1\leqslant\lambda_2)$. Из соотношений (2) заключаем, что в этом случае в любой точке (кроме начала координат) будет $\Phi<0$. Такая форма называется *отрицательно определенной*. На единичной окружности отрицательно определенная форма изменяется в постоянных отрицательных границах. Итак, каждая эллиптическая форма

$$\Phi=Ax^2+2Bxy+Cy^2 \quad (\delta=AC-B^2>0)$$

является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной. Чтобы узнать, к какому из этих двух классов относится данная эллиптическая форма, достаточно проверить ее знак в какой-нибудь точке. Беря $x=1$, $y=0$, заключаем: эллиптическая форма будет положительно определенной, если $A>0$, и отрицательно определенной, если $A<0$.

Рассмотрим теперь параболическую форму. Допустим, что $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$; тогда

$$0\leqslant\Phi\leqslant\lambda_2(x^2+y^2).$$

Таким образом, в данном случае форма Φ повсюду положительна или равна нулю. Но, в отличие от эллиптической формы, параболическая форма обращается в нуль не только в начале координат. В частности, на единичной окружности имеем

$$0\leqslant\Phi\leqslant\lambda_2,$$

т. е. Φ изменяется в границах, одна из которых есть нуль, другая — положительное число λ_2.

Аналогичным образом можно установить, что в случае $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ параболическая форма Φ повсюду отрицательна или равна нулю. На единичной окружности такая форма изменяется между отрицательным числом λ_1 и нулем.

Рассмотрим, наконец, гиперболическую форму. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Так как λ_1 и λ_2 представляют собой границы изменения Φ на единичной окружности, то гиперболическая форма является знакопеременной.

Примеры. 1) Форма $\Phi = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ является эллиптической, так как $\delta = 21 > 0$, и положительно определенной, так как $A = 5 > 0$. На единичной окружности $(x^2 + y^2 = 1)$ она заключена в границах

$$3 \leqslant 5x^2 - 4xy + 5y^2 \leqslant 7.$$

2) Форма $\Phi = x^2 - 2xy + y^2$ является параболической, так как $\delta = 0$. Эта форма положительна в каждой точке, где $x \neq y$, и равна нулю в точках, где $x = y$. На единичной окружности она заключена в границах

$$0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 \leqslant 2.$$

3) Форма $\Phi = x^2 + 12xy + y^2$ является гиперболической, следовательно, знакопеременной, так как $\delta = -35 < 0$. На единичной окружности она заключена между числами -5 и $+7$.

4) Уравнение $5x^2 - 4xy + 5y^2 = -1$ не определяет никакого действительного образа, так как данная квадратичная форма является положительно определенной, а справа в этом уравнении стоит отрицательное число.

§ 4. Приведение к каноническому виду общего уравнения линии второго порядка

15. Пусть дано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Наша цель — привести уравнение (1) к каноническому виду и тем самым установить вид данной линии. Левую часть уравнения (1) образуют следующие группы членов:

1) квадратичная форма, состоящая из старших членов $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$;

2) линейная форма членов первой степени $2Dx + 2Ey$;

3) свободный член F.

Предположим, что координатные оси данной системы координат поворачиваются на произвольный угол; тогда координаты изменятся по формулам вида

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y', \\ y &= m_1 x' + m_2 y'. \end{aligned} \tag{2}$$

Если мы перейдем в уравнении (1) к новым координатам, т. е. заменим x, y их выражениями по формулам (2), то каждая из указанных групп членов левой части уравнения преобразуется автономно (не влияя друг на друга). Направим новые координатные оси по главным направлениям квадратичной формы старших членов (их называют также главными направлениями данной линии). Тогда

1) квадратичная форма старших членов примет канонический вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

2) Следующим образом изменится группа членов первой степени:

$$\begin{aligned} 2Dx + 2Ey &= 2D(l_1 x' + l_2 y') + 2E(m_1 x' + m_2 y') = \\ &= 2(Dl_1 + Em_1)x' + 2(Dl_2 + Em_2)y' = 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' \end{aligned}$$

(через μ_1, μ_2 обозначены новые коэффициенты).

3) Свободный член останется без изменения.

Мы получим уравнение данной линии в новых координатах:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + F = 0. \tag{3}$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения производится в зависимости от типа квадратичной формы старших членов.

Согласно § 3 будем обозначать далее через δ дискриминант квадратичной формы старших членов первоначального уравнения:

$$\delta = AC - B^2.$$

16. Предположим, что $\delta \neq 0$. Так как $\delta = \lambda_1\lambda_2$, то

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0$$

и мы можем полученное выше уравнение (3) переписать так:

$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{\mu_1}{\lambda_1}x'\right) + \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{\mu_2}{\lambda_2}y'\right) = -F.$$

Отсюда

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 = -F + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}. \tag{4}$$

Совершим параллельный перенос системы повернутых осей на величину $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ в направлении оси Ox' и на величину $-\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ в направлении оси Oy'; переход к новым координатам дается формулами:

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

$$y' = y'' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

Если мы обозначим правую часть (4) одной буквой H, то уравнение данной линии в последних координатах примет канонический вид:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = H. \tag{5}$$

Возможны два случая.

1) Числа λ_1, λ_2 одного знака; будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (в противном случае изменим знаки всех членов уравнения). Если $H \neq 0$, то уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}} = 1;$$

отсюда видно, что при $H > 0$ уравнение (5) определяет эллипс с полуосями $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{\lambda_2}}$.

Если $H = 0$, то уравнение (5) определяет единственную вещественную точку: $x'' = 0$, $y'' = 0$. Однако в этом случае принято говорить, что уравнение (5) есть уравнение *вырожденного эллипса.*

Если $H < 0$ (при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$), то уравнение (5) никакого вещественного образа не определяет. В этом случае говорят также, что уравнение (5) есть уравнение *мнимого эллипса.*

2) Числа λ_1, λ_2 разных знаков; будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Если при этом $H > 0$, то уравнение (5) определяет *гиперболу*, которая пересекает ось абсцисс и имеет полуоси: $a = \sqrt{\frac{H}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{H}{\lambda_2}}$; если $H < 0$, то также получается гипербола, но пересекающая ось ординат. Если $H = 0$, то уравнение (5) определяет пару прямых, проходящих через начало координат. В самом деле, левая часть

уравнения (5) разлагается на вещественные множители первой степени; при $H=0$ имеем

$$(\sqrt{\lambda_1}\,x''+\sqrt{-\lambda_2}\,y'')\,(\sqrt{\lambda_1}\,x''-\sqrt{-\lambda_2}\,y'')=0;$$

следовательно, линия состоит из прямых $\sqrt{\lambda_1}\,x''+\sqrt{-\lambda_2}\,y''=0$ и $\sqrt{\lambda_1}\,x''-\sqrt{-\lambda_2}\,y''=0$ (например, уравнение $4x''^2-9y''^2=0$ определяет пару прямых $2x''+3y''=0$, $2x''-3y''=0$). В последнем случае говорят также, что уравнение (5) определяет *вырожденную гиперболу*.

Вернемся теперь к исходному уравнению (1). По старшим коэффициентам этого уравнения мы сразу можем подсчитать $\delta=AC-B^2$. Но $\delta=\lambda_1\lambda_2$; таким образом, если $\delta>0$, то λ_1, λ_2 — числа одного знака; если $\delta<0$, то λ_1, λ_2 — числа разных знаков. Отсюда заключаем: *если данное уравнение* (1) *имеет* $\delta=AC-B^2>0$, *то оно определяет эллипс* (вещественный, мнимый или вырожденный); *если* $\delta<0$, *то уравнение определяет гиперболу* (настоящую или вырожденную).

17. Рассмотрим теперь уравнение (1) при условии $\delta=0$. Так как $\delta=\lambda_1\lambda_2$, то на этот раз одно из чисел λ_1, λ_2 равно нулю. Будем считать, что

$$\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0.$$

Уравнение (3) будет иметь вид

$$\lambda_1 x'^2+2\mu_1 x'+2\mu_2 y'+F=0,$$

или

$$\lambda_1\left(x'+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+2\mu_2 y'+\left(F-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}\right)=0.$$

Обозначая величину, стоящую в последней скобке, одной буквой K, получим

$$\lambda_1\left(x'+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+2\mu_2 y'+K=0. \tag{6}$$

Дальнейшее преобразование уравнения (6) зависит от μ_2.

1) Если $\mu_2\neq 0$, то уравнение (6) можно переписать так:

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+2\mu_2\left(y'+\frac{K}{2\mu_2}\right)=0.$$

Совершим параллельный перенос системы осей Ox', Oy' на величину $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ в направлении оси Ox' и на величину $-\frac{K}{2\mu_2}$ в направлении оси Oy'; переход к новым координатам дается формулами

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{K}{2\mu_2}.$$

Мы получим каноническое уравнение параболы:

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' = 0.$$

2) Если $\mu_2 = 0$, то достаточно совершить параллельный перенос системы осей только в направлении оси Ox' на величину $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$; тогда $x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $y' = y''$ и уравнение (6) примет следующий канонический вид:

$$\lambda_1 x''^2 + K = 0. \tag{7}$$

Предположим $\lambda_1 > 0$. Тогда, если $K < 0$, то уравнение (7) определяет пару параллельных прямых:

$$\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-K} = 0, \quad \sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-K} = 0 \tag{8}$$

(например, уравнение $4x'' - 9 = 0$ определяет пару параллельных прямых: $2x'' + 3 = 0$, $2x'' - 3 = 0$). Если $K = 0$, то прямые (8) сливаются. Если $K > 0$, то уравнение (7) никакого вещественного образа не определяет. Однако в этом случае говорят, что уравнение (7) определяет *пару мнимых параллельных прямых* (при $K > 0$ в уравнениях (8) число $\sqrt{-K}$ будет мнимым). Вообще уравнение (7) называют уравнением *вырожденной параболы.*

Возвращаясь к исходному уравнению (1), приходим к следующему заключению: *если* $\delta = AC - B^2 = 0$, *то уравнение* (1) *является уравнением параболы* (обыкновенной или вырожденной).

18. Подводя итог всему исследованию, мы приходим к следующему общему выводу: *каждое уравнение второй степени*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

определяет либо эллипс (*если* $\delta = AC - B^2 > 0$), *либо гиперболу* (*если* $\delta < 0$), *либо параболу* (*если* $\delta = 0$). При этом следует учитывать мнимый и вырожденный эллипсы, а также вырожденные гиперболы и параболы.

§ 5. Уравнения центра. Признак вырождения линии второго порядка. Примеры

19. Вернемся к n°16, где мы приводили к простейшему виду общее уравнение второй степени в случае, когда оно определяет эллипс или гиперболу (т. е. в случае $\delta \neq 0$). Мы упростили уравнение в два приема: сначала повернули оси, придав им главные направления кривой, затем совершили параллельный перенос повернутых осей. Легко понять геометрический смысл последнего преобразования: начало координат оказалось в центре данного эллипса или гиперболы. Можно провести эти действия в ином порядке: во-первых, перенести начало координат в центр линии, затем нужным образом повернуть оси. Имея в виду такой план, выведем уравнения, которые определяют центр линии второго порядка (если он есть) непосредственно по общему уравнению этой линии.

20. Прежде всего нужно уточнить, чтó мы имеем в виду, когда говорим о центре линии второго порядка вообще.

Некоторую точку S мы называем *центром* данной линии второго порядка, если после переноса начала координат в точку S уравнение линии примет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

т. е. не будет содержать членов первой степени. Левая часть такого уравнения не меняется при одновременном изменении знаков текущих координат; это означает, что точки линии расположены парами, симметрично относительно точки S, т. е. что точка S является центром симметрии линии (по существу, понятие центра уже употреблялось нами раньше, в § 2; сейчас мы только сформулировали это понятие более определенным образом).

Пусть дана линия второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Требуется найти ее центр (если он есть). Предполагая, что центр имеется, обозначим его, как и раньше, буквой S; обозначим через x_0, y_0 искомые координаты центра (в данной координатной системе). Перенесем начало координат в точку S; при этом координаты произвольной точки изменятся по формулам

$$x = \tilde{x} + x_0, \quad y = \tilde{y} + y_0, \tag{2}$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — новые координаты той же точки. Перейдем в уравнении (1) к новым координатам. С этой целью, подставив в левую часть уравнения (1) вместо x, y их выражения по формулам (2) и приведя подобные члены (подобные относительно новых текущих координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$), мы получим

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$
$$= A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + 2\tilde{D}\tilde{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + \tilde{F}, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{D} &= Ax_0 + By_0 + D, \\ \tilde{E} &= Bx_0 + Cy_0 + E, \\ \tilde{F} &= Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

коэффициенты старших членов остаются прежними.

Преобразование левой части уравнения (1) происходит согласно этим формулам в любом случае, т. е. независимо от того, что̀ представляет собой точка S. Точка S будет центром, если $\tilde{D} = 0$, $\tilde{E} = 0$. Отсюда получаем уравнения центра:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решая их совместно, найдем центр $S(x_0, y_0)$. Система (5) может оказаться несовместной; тогда центра у данной линии нет.

Напишем определитель системы (5):

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Мы видим, что это — известный уже нам дискриминант группы старших членов.

Если $\delta \neq 0$, то система (5) совместна и имеет единственное решение. Следовательно, если $\delta \neq 0$, то данная линия имеет единственный центр. Такая линия второго порядка называется *центральной*. В случае центральной линии координаты центра выражаются формулами (см. Курс, Приложение, § 1):

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Отсюда и из (4) найдем $\tilde{F}$. Вычисление $\tilde{F}$ можно значительно упростить, если выразить $\tilde{F}$ со следующей группировкой членов:

$$\tilde{F} = (Ax_0 + By_0 + D)\,x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)\,y_0 + \\ + (Dx_0 + Ey_0 + F);$$

вследствие системы (5) имеем

$$\tilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F.$$

Используя (6), найдем

$$\tilde{F} = \frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Числитель полученной дроби может быть записан в виде определителя третьего порядка:

$$D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Этот определитель обозначается символом Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

и называется дискриминантом левой части общего уравнения (1). Из (7) окончательно имеем:

$$\tilde{F} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Итак, если линия, заданная уравнением (1), является центральной ($\delta \neq 0$), то после переноса начала координат в ее центр данное уравнение (1) приводится к виду

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\frac{\Delta}{\delta}=0 \tag{8}$$

(коэффициенты A, B, C — прежние). Совершая теперь надлежащий поворот осей, можно привести уравнение (8) к каноническому виду:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{9}$$

Таким образом, свободный член H в уравнении (5) § 4 может быть подсчитан по данному уравнению (1) сразу, без того, чтобы на самом деле выполнять преобразование координат $H=-\frac{\Delta}{\delta}$. Тем самым может быть написано и все уравнение, поскольку характеристические числа λ_1, λ_2 также непосредственно находятся по коэффициентам старших членов (см. § 2).

21. В § 4 установлено, что уравнение (5) § 4 определяет вырожденную линию при $H=0$. Отсюда заключаем: центральная линия второго порядка является вырожденной тогда и только тогда, когда $\Delta=0$.

В следующем n° мы покажем, что точно такое же условие характеризует вырожденную параболу.

22. Предположим, что исходное уравнение (1) имеет $\delta=0$. Тогда оно приводится к виду (6) § 4. Мы установим сейчас формулу, которая позволяет сразу подсчитать коэффициент μ_2 в этом уравнении, зная коэффициенты исходного уравнения (1). Именно,

$$\mu_2=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}};$$

одновременно будет показано, что подкоренное выражение здесь $\geqslant 0$. Так как $\delta=AC-B^2=0$, то оба коэффициента A и C не могут быть равными нулю (тогда все три коэффициента были бы равны нулю и уравнение не имело бы старших членов). Допустим, что $A\neq 0$; будем считать, что $A>0$ (в противном случае изменим знаки всех членов).

Положим $\alpha=\sqrt{A}$, $\beta=\frac{B}{\alpha}$; тогда $A=\alpha^2$, $B=\alpha\beta$. Отсюда и из условия $AC-B^2=0$ найдем $C=\beta^2$. Согласно n°17, где впервые появился коэффициент μ_2, имеем

$$\mu_2=Dl_2+Em_2;$$

здесь $\{l_2;\ m_2\}$ — вектор, который определяет главное направление соответствующее характеристическому числу $\lambda_2=0$; при этом

$l_2^2+m_2^2=1$. Подставим $\lambda=\lambda_2=0$ в систему (11) § 2, одновременно полагая $A=\alpha^2$, $B=\alpha\beta$, $C=\beta^2$; система примет вид:

$$\alpha^2 l+\alpha\beta m=0,$$
$$\alpha\beta l+\beta^2 m=0.$$

В качестве решения этой системы можно взять $l=-\beta$, $m=\alpha$. Нормируя это решение, получим

$$l_2=\frac{-\beta}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad m_2=\frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

С другой стороны, из характеристического уравнения (12) § 2 найдем $\lambda_1=A+C=\alpha^2+\beta^2$. Следовательно,

$$l_2=\frac{-\beta}{\pm\sqrt{\lambda_1}},\qquad m_2=\frac{\alpha}{\pm\sqrt{\lambda_1}},$$
$$\mu_2=Dl_2+Em_2=\pm\frac{E\alpha-D\beta}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Подсчитаем дискриминант левой части данного уравнения:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & D\\ \alpha\beta & \beta^2 & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=D(\alpha\beta E-\beta^2 D)-E(\alpha^2 E-\alpha\beta D)=$$
$$=-E\alpha(E\alpha-D\beta)+D\beta(E\alpha-D\beta)=-(E\alpha-D\beta)^2.$$

Таким образом, $(E\alpha-D\beta)^2=-\Delta$. Отсюда

$$\mu_2=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}},$$

что и утверждалось. Подкоренное выражение здесь не отрицательно, так как $\Delta\leqslant 0$, $\lambda_1>0$.

Рассмотрим две возможности (считая $\delta=0$):

1) $\Delta\neq 0$; тогда $\mu_2\neq 0$ и данное уравнение (1) определяет параболу в собственном смысле слова (см. § 4). Каноническое уравнение этой параболы можно написать теперь в готовом виде:

$$\lambda_1 x''^2\pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}}\,y''=0; \tag{10}$$

выбор знака определяется в зависимости от выбора положительного направления оси ординат.

2) $\Delta=0$; тогда $\mu_2=0$ и парабола будет вырожденной.

23. Теперь мы можем высказать общее утверждение: *уравнение* (1) *определяет вырожденную линию второго порядка тогда и только тогда, когда дискриминант его левой части равен нулю:* $\Delta=0$.

24. Пример. Дано уравнение

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$$

установить, какую именно линию определяет это уравнение, и привести его к каноническому виду.

Решение. Имеем $\delta=9>0$; $\Delta=-81$, следовательно, данная линия является невырожденным эллипсом. Составим характеристическое уравнение группы старших членов: $\lambda^2-10\lambda+9=0$; отсюда $\lambda_1=9$, $\lambda_2=1$. Каноническое уравнение можем написать теперь сразу: $9x^2+y^2-9=0$ (см. n° 20), или

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Таким образом, данная линия является действительным эллипсом с полуосями 3 и 1. Если нас, кроме того, интересует расположение

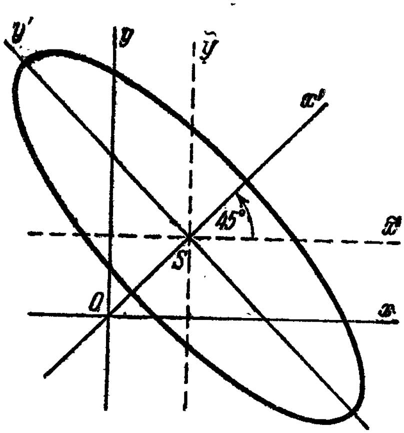

Рис. 4.

этого эллипса, то придется находить его центр и главные направления (рис. 4). Составим уравнение центра:

$$5x_0+4y_0-9=0,$$
$$4x_0+5y_0-9=0.$$

Отсюда $x_0=1$, $y_0=1$. Перенесем начало координат в центр (без поворота осей); при этом координаты изменятся по формулам $x=\tilde{x}+1$, $y=\tilde{y}+1$, а уравнение примет вид

$$5\tilde{x}^2+8\tilde{x}\tilde{y}+5\tilde{y}^2-9=0 \qquad (*)$$

(см. n° 20).

Найдем главное направление, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1=9$. Для этого подставим в систему (11) § 2

$A=5,\ B=4,\ C=5,\ \lambda=\lambda_1=9$; получим

$$-4l+4m=0,$$
$$4l-4m=0.$$

В качестве решения этой системы можно взять $l=1,\ m=1$.

В данном случае легко определяется угол α, который составляет с осью $O\tilde{x}$ это главное направление:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{l}=1,\ \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Значит, оси нужно повернуть на 45°; отсюда имеем формулы соответствующего преобразования координат:

$$\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad \tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Преобразование уравнения (*) по этим формулам приведет нас согласно теории к каноническому уравнению $9x'^2+y'^2-9=0$, в чем можно убедиться также и непосредственной проверкой.

Пример. Дано уравнение

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0;$$

установить, какую именно линию определяет это уравнение, и привести его к каноническому виду.

Решение. Имеем $\delta=0$, $\Delta=-225$. Следовательно, данное уравнение определяет обыкновенную (невырожденную) параболу. Составим характеристическое уравнение группы старших членов $\lambda^2-5\lambda=0$; отсюда $\lambda_1=5$, $\lambda_2=0$. Согласно n° 22 каноническое уравнение кривой имеет вид $5x^2\pm 6\sqrt{5}y=0$. Если нас, кроме того, интересует расположение нашей параболы, то придется находить ту координатную систему, в которой уравнение этой параболы имеет канонический вид.

Найдем главные направления данной параболы (относительно старых осей). В данном случае система (11) § 2 при $\lambda=\lambda_1=5$ будет

$$-l-2m=0,$$
$$-2l-4m=0.$$

В качестве решения системы возьмем $l=-2$, $m=1$. Вектор $\{-2;\ 1\}$ составляет с осью Ox тупой угол. Желая повернуть оси на острый угол, поменяем ролями главные направления, будем считать $\lambda_2=5$, $\lambda_1=0$. Тогда найденное решение дает второе главное направление; нормируя решение, получим

$$l_2=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad m_2=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

В таком случае для первого главного направления (которое отвечает числу $\lambda_1=0$) имеем

$$l_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad m_1=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Чтобы направить оси по этим главным направлениям, нужно повернуть их на угол α, имея $\operatorname{tg}\alpha=2$. Соответствующие формулы преобразования координат будут:

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

Переходя в данном уравнении к новым координатам, найдем

$$5y'^2-6\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0.$$

Заметим, что квадратичный член здесь определяется сразу согласно теории, так как $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$; свободный член переходит из данного уравнения без изменения (см. n° 15). Таким образом, фактически преобразование потребовалось выполнять лишь по отношению к членам первой степени.

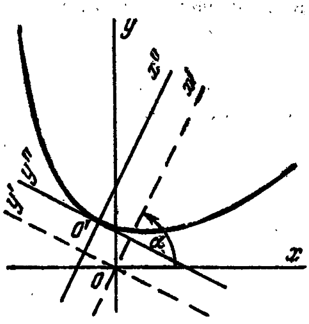

Рис. 5.

Перепишем предыдущее уравнение так:

$$5\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-6\sqrt{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0.$$

Теперь видно, что нужен параллельный перенос системы Ox', Oy' на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Ox' и на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Oy'; при этом координаты преобразуются по формулам

$$x'=x''+\frac{\sqrt{5}}{5},\quad y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

и данное уравнение принимает канонический вид:

$$5y''^2-6\sqrt{5}x''=0.$$

Начало последней системы координат находится в вершине этой параболы, координаты вершины в системе x', y' суть $\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, а в системе x, y суть $\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$. Расположение параболы показано на рис. 5.

ГЛАВА II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 6. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве

25. Пусть дана декартова система координат с осями Ox, Oy, Oz. Рассмотрим новую систему координат с началом в точке O', оси которой $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ соответственно параллельны осям Ox, Oy, Oz старой системы и имеют те же направления (масштаб остается прежним). Пусть известны старые координаты нового начала $O'(a;\ b;\ c)$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x, y, z — старые координаты произвольной точки, x', y', z' — новые координаты той же точки. Формулы (1) выражают преобразование координат при параллельном перемещении осей. Доказательство этих формул по существу очевидно. В самом деле, так как система осей параллельно перемещается на величину a в направлении Ox, на величину b в направлении Oy и на величину c в направлении Oz, то абсциссы всех точек уменьшаются на a, ординаты — на b, аппликаты — на c ($x' = x - a$ и т. д.).

26. Теперь мы установим формулы преобразования декартовых прямоугольных координат при таком изменении координатной системы, когда изменяются ее оси (однако остаются перпендикулярными друг к другу), а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть Ox, Oy, Oz — старые, Ox', Oy', Oz' — новые координатные оси. Будем считать, что нам известны углы, которые образует каждая ось новой системы с каждой осью старой; обозначения этих углов дадим следующей таблицей:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

(2)

Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ базисные векторы старых и новых осей. Напишем разложение каждого вектора $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ по старому базису:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= l_1\boldsymbol{i} + m_1\boldsymbol{j} + n_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' &= l_2\boldsymbol{i} + m_2\boldsymbol{j} + n_2\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' &= l_3\boldsymbol{i} + m_3\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как каждый из векторов $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ является единичным, то для каждого из них коэффициентами разложения будут служить направляющие косинусы. Таким образом, вся таблица коэффициентов формул (3) дается следующим равенством:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

которое нужно понимать так: $l_1 = \cos\alpha_1$, $m_1 = \cos\beta_1$ и т. д.

Обозначим через M произвольную точку пространства, через $(x;\ y;\ z)$ — старые координаты этой точки, через $(x';\ y';\ z')$ — ее новые координаты. Имеет место векторное равенство:

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}', \tag{5}$$

поскольку его левая и правая части представляют собой разложение одного и того же вектора $\boldsymbol{OM}$ (по разным базисам). Заменяя в равенстве (5) векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ их выражениями по формулам (3), получим

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x'(l_1\boldsymbol{i}+m_1\boldsymbol{j}+n_1\boldsymbol{k})&+\\ +y'(l_2\boldsymbol{i}+m_2\boldsymbol{j}+n_2\boldsymbol{k})&+\\ +z'(l_3\boldsymbol{i}+m_3\boldsymbol{j}+n_3\boldsymbol{k})&, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(l_1x'+l_2y'+l_3z')\boldsymbol{i}&+\\ +(m_1x'+m_2y'+m_3z')\boldsymbol{j}&+\\ +(n_1x'+n_2y'+n_3z')\boldsymbol{k}&. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как коэффициенты разложения вектора по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ определяются этим вектором однозначно, то из (6) вытекают три равенства:

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Искомые формулы найдены. Если заменить в них коэффициенты l_1, l_2, ..., n_3 согласно (4), то они примут законченный вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

27. Формулы (7) (или (8)) выражают с т а р ы е координаты произвольной точки через ее н о в ы е координаты. Часто требуются о б р а т н ы е ф о р м у л ы, выражающие н о в ы е координаты через с т а р ы е. Чтобы получить их, достаточно в формулах (7) поменять ролями старые и новые координаты, одновременно транспонируя таблицы (2) и (4) (т. е. меняя ролями их строчки и столбцы). Мы получим

$$\left.\begin{aligned} x'&=l_1x+m_1y+n_1z,\\ y'&=l_2x+m_2y+n_2z,\\ z'&=l_3x+m_3y+n_3z. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

28. Коэффициенты l_1, l_2, ..., n_3 в формулах (7) удовлетворяют определенным условиям. Найдем их. Прежде всего учтем, что новые базисные векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ являются единичными; поэтому

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+m_1^2+n_1^2=1,\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=1,\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2=1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Далее, векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ попарно перпендикулярны друг к другу; поэтому их попарно взятые скалярные произведения должны быть равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,\\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0,\\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Наконец, если тройки векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ обе правые (или обе левые), то смешанное произведение $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ положительно и равно объему единичного куба, т. е. $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'=1$; следовательно, в этом случае

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=1. \qquad (12a)$$

Если же тройки векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ ориентированы по-разному (одна правая, другая левая), то

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=-1. \qquad (12b)$$

На основании сказанного ясно, что существует два вида преобразований декартовых прямоугольных координат: сохраняющие ориентацию координатного базиса и нарушающие ее. Первые характеризуются условием (12a), вторые — условием (12b).

Заметим, что соотношения (10), (11) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями того, что формулы (7) выражают преобразования прямоугольных координат (с неизменным масштабом). В самом деле, допустим, что нам дана система прямоугольных координат с осями Ox, Oy, Oz и даны формулы (7) с какими-то коэффициентами l_1, l_2, ..., n_3. По данным коэффициентам построим векторы

i', j', k' согласно (3). Тогда, если соблюдены условия (10), то векторы i', j', k' — все единичные. Если соблюдены условия (11), то векторы i', j', k' попарно перпендикулярны. Значит, при соблюдении (10) и (11) мы действительно имеем переход к новой, также прямоугольной системе координат (с тем же масштабом). Сохраняется ли при этом ориентация базиса, или нарушается, легко установить проверкой условий (12a, b).

29. Если начало координат переносится в точку $O'(a;\ b;\ c)$ и вместе с тем меняются направления осей, то координаты преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + a, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + b, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + c, \end{aligned}$$

где коэффициенты $l_1, l_2, \ldots, n_3$ определяются согласно (4) по данной таблице (2).

§ 7. Некоторые общие выводы, основанные на формулах преобразования координат

30. После того как получены формулы преобразования декартовых прямоугольных координат в пространстве, легко доказать следующую теорему:

Если поверхность определяется алгебраическим уравнением степени n в какой-нибудь системе декартовых прямоугольных координат, то в любой другой системе таких же координат она определяется также алгебраическим уравнением и той же степени n.

Доказательство проводится совершенно аналогично тому, как доказывалась в n° 39 Курса теорема 8.

31. Из предыдущей теоремы тотчас следует, что линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью есть алгебраическая линия не выше второго порядка.

Доказательство. Пусть даны какая-нибудь поверхность второго порядка и некоторая плоскость α. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее оси Ox и Oy расположились в плоскости α. Согласно n° 30 данная поверхность в выбранной системе координат, как и во всякой декартовой системе координат, будет определяться некоторым уравнением второй степени:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + \\ + 2Hy + 2Kz + L = 0. \qquad (1)$$

Плоскость α имеет в этой системе координат уравнение $z = 0$. Линия пересечения данной поверхности с плоскостью α определяется уравнением (1) совместно с уравнением $z=0$. Полагая в уравнении (1) $z=0$, мы получим

$$Ax^2+By^2+2Dxy+2Gx+2Hy+L=0. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение линии пересечения данной поверхности с плоскостью α в системе координат, которая на плоскости α задана осями Ox и Oy. Но уравнение (2) представляет собой алгебраическое уравнение не выше второй степени. Тем самым утверждение доказано.

Замечание. Степень уравнения (2) может оказаться ниже двух, это будет именно в случае, когда A, B и D обращаются в нуль. Например, параболический цилиндр пересекается со своей плоскостью симметрии по прямой, т. е. по линии первого порядка. Но такие случаи являются исключительными; вообще говоря, поверхность второго порядка пересекается с плоскостью по линии второго порядка.

32. Круглый конус есть поверхность второго порядка. Отсюда и на основании сказанного выше следует, что каждая плоскость, не проходящая через вершину круглого конуса, пересекает его по невырожденной линии второго порядка, т. е. либо по эллипсу, либо по гиперболе, либо по параболе. Тем самым устанавливается справедливость теоремы 14 Курса, которую мы оставили без доказательства.

§ 8. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка с центром в начале координат

33. Далее мы будем заниматься упрощением общего уравнения поверхности второго порядка путем перехода к новым координатам. В целях простоты последующих выкладок введем удобную запись общего уравнения второй степени относительно трех переменных x, y, z. Ранее мы обозначали коэффициенты такого уравнения разными буквами; нам требовалось десять букв. В последующие формулы эти буквы войдут в разных сочетаниях и формулы будет трудно запоминать. Более целесообразной оказывается другая система обозначений, когда все коэффициенты обозначаются одной буквой с двумя числовыми значками снизу (их называют индексами). По этой системе общее уравнение второй степени относительно x, y, z пишется так:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (1)$$

Здесь применяется следующий принцип: в индексах коэффициента пишется 1, 2 или 3 столько раз, сколько раз встречается сомножителем при этом коэффициенте x, y или z; в качестве добавочного индекса берется 4. Например, коэффициент при x^2 помечается два раза единицей, так как $x^2=x\cdot x$; коэффициент при xz помечается одной единицей и одной тройкой; коэффициент при x помечается одной единицей и одним добавочным индексом — четверкой, у свободного члена оба индекса добавочные (две четверки). Порядок индексов безразличен; таким образом, $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$ и т. д. Коэффициентами уравнения (1) называются числа $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{12}, \ldots, a_{44}$ (хотя, строго говоря, число a_{12}, например, есть только половина коэффициента при xy). Причина постановки множителя 2 при некоторых коэффициентах хорошо выясняется с помощью следующего тождества:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=\\ =(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})\,x+\\ +(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})\,y+\\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34})\,z+\\ +(a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}). \end{aligned} \qquad (2)$$

Отсюда видно, что члены левой части с четвертого по девятый естественным образом составляются из двух одинаковых экземпляров каждый.

34. В этом параграфе мы рассмотрим неполное уравнение второй степени следующего вида:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=H. \qquad (3)$$

Особенностью его является отсутствие членов первой степени. Ввиду этого левая часть (3) не меняется при замене x, y, z на $-x$, $-y$, $-z$; следовательно, если точка $M(x;\,y;\,z)$ лежит на поверхности (3), то точка $N(-x;\,-y;\,-z)$ также лежит на этой поверхности. Иначе говоря, точки поверхности (3) расположены парами, симметрично относительно начала координат. Таким образом, если поверхность второго порядка задана уравнением вида (3), то: 1) она о б л а д а е т ц е н т р о м (симметрии); 2) начало координат помещено в центр.

35. Левая часть уравнения (3)

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \qquad (4)$$

представляет собой однородный многочлен второй степени (т. е. многочлен, состоящий только из членов второй степени). Такой многочлен называется *квадратичной формой* от трех переменных x, y, z. Мы займемся сейчас задачей о приведении квадратичной формы (4) к каноническому виду. Сущность этой задачи в следующем: требуется повернуть систему координатных осей так, чтобы после приведения формы (4) к новым (прямоугольным) координатам исчезли все члены с произведениями новых текущих координат. Согласно § 6 дело сводится к тому, чтобы найти формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в силу которых имеет место тождество

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Это значит, что после замены величин x, y, z по формулам (5) данная квадратичная форма должна принять вид, указанный в правой части (6) и называемый *каноническим видом*. Коэффициенты формул (5) надлежит подобрать так, чтобы соблюдались условия (10), (11) и (12а) § 6.

Если квадратичная форма (4) будет приведена к каноническому виду, то одновременно с нею получит *канонический вид* и уравнение (3). Мы докажем, что каждую квадратичную форму (4) (а вместе с тем и каждое уравнение (3)) можно привести к каноническому виду.

36. Предположим сначала, что коэффициенты формул (5) уже найдены и тождество (6) достигнуто. Перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\,y + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\,z = \lambda_1 x'x' + \lambda_2 y'y' + \lambda_3 z'z'. \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь каждую из скобок в левой части преобразуем по формулам (5):

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = (a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,x' + \\ + (a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2)\,y' + \\ + (a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3)\,z'; \end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\, x' &+ \\
+ (a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2)\, y' &+ \\
+ (a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3)\, z'&;
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\, x' &+ \\
+ (a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2)\, y' &+ \\
+ (a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3)\, z'&.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Используем, далее, обратные формулы преобразования координат:

$$
\begin{aligned}
x' &= l_1x + m_1y + n_1z, \\
y' &= l_2x + m_2y + n_2z, \\
z' &= l_3x + m_3y + n_3z.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\left.
\begin{aligned}
x'x' &= l_1xx' + m_1yx' + n_1zx', \\
y'y' &= l_2xy' + m_2yy' + n_2zy', \\
z'z' &= l_3xz' + m_3yz' + n_3zz'.
\end{aligned}
\right\} \tag{11}
$$

Если мы подставим выражения (8), (9) и (10) в левую часть (7), то получим слева девять различных членов; если подставим выражения (11) в правую часть (7), то получим справа девять аналогичных членов. Тождество (7) будет обеспечено, если коэффициенты подобных членов слева и справа окажутся одинаковыми; одновременно будет обеспечено и тождество (6). Таким образом, для обеспечения тождества (6) достаточно подобрать коэффициенты формул (5) и числа λ_1, λ_2, λ_3 так, чтобы

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 &= \lambda_1 l_1, \\
a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 &= \lambda_1 m_1, \\
a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 &= \lambda_1 n_1;
\end{aligned}
\right\} \tag{12a}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 &= \lambda_2 l_2, \\
a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 &= \lambda_2 m_2, \\
a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 &= \lambda_2 n_2;
\end{aligned}
\right\} \tag{12b}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 &= \lambda_3 l_3, \\
a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 &= \lambda_3 m_3, \\
a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{33}n_3 &= \lambda_3 n_3.
\end{aligned}
\right\} \tag{12c}
$$

Дело свелось к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n&=\lambda l,\\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n&=\lambda m,\\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n&=\lambda n. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Задача будет завершена, если мы найдем три решения l_1, m_1, n_1, λ_1, l_2, m_2, n_2, λ_2 и l_3, m_3, n_3, λ_3 системы (13), удовлетворяющие условиям (10)—(12а) § 6.

37. Займемся системой (13). Перепишем ее следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n&=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n&=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad (15)$$

так как в противном случае мы не получим из системы (14) ничего, кроме $l=0$, $m=0$, $n=0$ (см. Курс, Приложение, § 5, n° 16).

Уравнение (15) есть уравнение третьей степени. Из него мы должны найти нужные нам значения $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$, а затем, решая систему (14) при найденных значениях λ, найти l_1, m_1, n_1 и т. д. Весьма важно, что уравнение (15) имеет только вещественные корни. Это утверждение будет доказано в следующем пункте.

38. Пусть $\lambda=\lambda_1$ — какой-нибудь корень уравнения (15). Если мы подставим $\lambda=\lambda_1$ в систему (14), то эта система будет иметь ненулевое решение (так как ее определитель будет равен нулю). Обозначим ненулевое решение системы (14), получаемое при $\lambda=\lambda_1$, через l_1, m_1, n_1. Если $\lambda=\lambda_2$ — какой-нибудь еще корень уравнения (15), то аналогичным образом определится соответствующее ему ненулевое решение системы (14), которое мы обозначим через l_2, m_2, n_2.

Лемма. *Если корни λ_1, λ_2 уравнения* (15) *различны, $\lambda_1\neq\lambda_2$, то соответствующие им решения системы* (14) *удовлетворяют условию перпендикулярности:*

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что числа l_1, m_1, n_1 удовлетворяют равенствам (12a), поскольку они найдены из (14); аналогично, l_2, m_2, n_2 удовлетворяют (12b). Умножим первое, второе и третье равенства (12a) соответственно на l_2, m_2, n_2 и после этого сложим их почленно; мы получим справа $\lambda_1(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)$. Точно так же, умножая равенства (12b) на l_1, m_1, n_1 и складывая, получим справа $\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)$. Слева и в том, и в другом случае будет получаться одна и та же величина, так как $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$ и $a_{23}=a_{32}$. Поэтому

$$\lambda_1(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2).$$

Отсюда

$$(\lambda_2-\lambda_1)(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=0,$$

а так как $\lambda_2\neq\lambda_1$, то $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$, что и требовалось.

Теорема. *Все корни уравнения* (15) *вещественны.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Допустим, что уравнение (15) имеет комплексный корень $\lambda_1=\alpha+\beta i$; $\beta\neq 0$. Тогда, так как коэффициенты уравнения (15) вещественны, оно должно иметь еще один комплексный корень $\lambda_2=\alpha-\beta i$ (сопряженный первому). Корню λ_1 соответствует некоторое ненулевое решение системы (14). Поскольку λ_1 — комплексное число, то при подстановке $\lambda=\lambda_1=\alpha+\beta i$ в систему (14) некоторые коэффициенты этой системы окажутся комплексными числами; поэтому ненулевое решение системы (14), соответствующее корню $\lambda=\lambda_1$, будет состоять из комплексных чисел:

$$l_1=l+il',\quad m_1=m+im',\quad n_1=n+in'.$$

Так как число $\lambda_2=\alpha-\beta i$ сопряжено числу $\lambda_1=\alpha+\beta i$, то корню $\lambda=\lambda_2$ будет соответствовать решение l_2, m_2, n_2, сопряженное решению l_1, m_1, n_1, т. е.

$$l_2=l-il',\quad m_2=m-im',\quad n_2=n-in'.$$

Поскольку $\beta\neq 0$, корни $\lambda_1=\alpha+i\beta$ и $\lambda_2=\alpha-i\beta$ различны; но тогда на основании леммы

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Отсюда

$$l^2+l'^2+m^2+m'^2+n^2+n'^2=0.$$

Следовательно,

$$l=0,\ l'=0,\ m=0,\ m'=0,\ n=0,\ n'=0.$$

Значит, $l_1=0$, $m_1=0$, $n_1=0$. Но это противоречит тому, что l_1, m_1, n_1 является ненулевым решением системы (14). Ввиду полученного противоречия мы должны отвергнуть допущение, что существует комплексный корень. Теорема доказана.

Замечание. Доказательство этой теоремы основано на предыдущей лемме. Доказательство леммы существенно опиралось на условие симметрии элементов определителя (15) относительно его главной диагонали: $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$, $a_{23}=a_{32}$. Без этого условия утверждения леммы и теоремы неверны. Например, уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1+i$, $\lambda_3=1-i$, среди них — два комплексных. В данном случае теорема неприменима, так как $a_{23}=1$, $a_{32}=-1$, $a_{23}\neq a_{32}$.

39. Уравнение (15) называется *характеристическим уравнением* квадратичной формы (4). Корни λ_1, λ_2, λ_3 (всегда вещественные) уравнения (15) называются *характеристическими числами* формы (4); они же получаются в качестве коэффициентов после приведения формы к каноническому виду.

Если мы подставим $\lambda=\lambda_1$ в систему (14), то система (14) будет иметь ненулевое решение l, m, n. Направление вектора $\{l;\ m;\ n\}$ называется *главным направлением* данной квадратичной формы, соответствующим характеристическому числу λ_1. Ясно, что вектор $\{l_1;\ m_1;\ n_1\}$, где $l_1=\mu l$, $m_1=\mu m$, $n_1=\mu n$ (μ — какое-нибудь число $\neq 0$), также имеет главное направление. Возьмем

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Тогда

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1.$$

Такое решение l_1, m_1, n_1 системы (14) будем называть нормированным. Вектор $\{l_1;\ m_1;\ n_1\}$ является единичным вектором главного направления, которое соответствует числу λ_1. Аналогично, решая систему при $\lambda=\lambda_2$ и при $\lambda=\lambda_3$ и нормируя решения, получим единичные векторы $\{l_2;\ m_2;\ n_2\}$ и $\{l_3;\ m_3;\ n_3\}$ главных направлений, которые соответствуют характеристическим числам $\lambda=\lambda_2$ и $\lambda=\lambda_3$. Теперь мы имеем почти весь необходимый материал, чтобы доказать, что каждая квадратичная форма (4) может быть приведена к каноническому виду при помощи преобразования прямоугольных координат.

40. Первый случай. Характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3 все разные. Тогда каждому из них соответствует главное направление, причем направления, соответствующие любым двум характеристическим числам, перпендикулярны между собой (см. лемму n° 38). Единичные векторы этих направлений

$$\begin{aligned} i' &= \{l_1;\ m_1;\ n_1\},\\ j' &= \{l_2;\ m_2;\ n_2\},\\ k' &= \{l_3;\ m_3;\ n_3\} \end{aligned}$$

находятся из системы (14) согласно указаниям n° 39. Если мы примем эти векторы в качестве базисных векторов новой системы координат, то после перехода к новым координатам квадратичная форма получит канонический вид: $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+$ $+\lambda_3 z'^2$ (это ясно, так как будут соблюдены равенства (12) и, следовательно, тождество (6)).

Переход к новым координатам дается формулами (5). Условия (10) § 6 будут соблюдены вследствие нормировки решений системы (14); условия (11) § 6 соблюдены, поскольку i', j', k' попарно перпендикулярны; для обеспечения условия (12а) § 6 нужно надлежащим образом выбрать знаки при нормировке решений системы (14) (если знаки выбраны какнибудь и если окажется, что условие (12а) § 6 не соблюдено, то достаточно изменить знаки, например, чисел l_1, m_1, n_1).

41. Второй случай. Среди характеристических чисел имеются два одинаковых, а третье — отлично от них (иначе говоря, характеристическое уравнение (15) имеет один двукратный корень). Будем считать, что $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$. Имеет место следующее предложение: *если в систему* (14) *подставить двукратный корень* $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ *уравнения* (15), *то система* (14) *сведется к одному существенному уравнению* (остальные уравнения системы будут его следствиями). Доказательство этого утверждения мы проведем позднее, в n° 44, а пока примем его на веру. Допустим для определенности записи, что при $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ существенным уравнением системы (14) будет

$$(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n=0. \tag{16}$$

Когда мы говорим, что это уравнение существенно, то имеем в виду, что оно — не тождество, т. е. что среди чисел $a_{11}-\lambda$, a_{12}, a_{13} имеется не равное нулю; это означает, что вектор $\{a_{11}-\lambda;\ a_{12},\ a_{13}\}$ является ненулевым. Всякое ненулевое решение l, m, n уравнения (16) дает вектор $\{l;\ m;\ n\}$, который определяет главное направление, соответствующее характеристическому числу $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. Учтем, что уравнение (16) выражает условие перпендикулярности векторов $\{l;\ m;\ n\}$ и $\{a_{11}-\lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$. Отсюда заключаем: характеристическому числу $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ соответствует бесконечно много главных направлений, именно, любое направление, перпендикулярное вектору $\{a_{11}-\lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$, есть главное направление, соответствующее числу $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. Отсюда в свою очередь следует, что сам вектор $\{a_{11}-\lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$ имеет главное направление, отвечающее числу $\lambda=\lambda_3$.

Теперь ясно, что и в случае $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ мы можем найти три единичных вектора, которые направлены по главным направлениям данной формы и попарно перпендикулярны друг другу. Нужно действовать следующим образом. Подставив в систему (14) число $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, найти любые два нормированные решения l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 этой системы, которые взаимно удовлетворяют условию перпендикулярности $(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0)$; тем самым мы получим два единичных вектора:

$$\boldsymbol{i}'=\{l_1;\ m_1;\ n_1\},\qquad \boldsymbol{j}'=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}.$$

Решая систему (14) при $\lambda=\lambda_3$ и нормируя решение, найдем третий единичный вектор:

$$\boldsymbol{k}'=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}.$$

Если мы примем $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ в качестве базиса новой координатной системы, то после перехода к новым координатам данная квадратичная форма получит канонический вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = \lambda (x'^2 + y'^2) + \lambda_3 z'^2 \quad (\text{где } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2).$$

Указание. Практически удобно сначала найти вектор $\boldsymbol{i}'$ (т. е. какое-нибудь одно нормированное решение l_1, m_1, n_1 системы (14) при $\lambda = \lambda_1$), затем вектор $\boldsymbol{k}'$; после этого вектор $\boldsymbol{j}'$ может быть найден, как векторное произведение $\boldsymbol{k}'$ на $\boldsymbol{i}'$. Заметим еще, что для определения $\boldsymbol{k}'$ нет необходимости решать систему (14), поскольку мы уже знаем, что направление $\boldsymbol{k}'$, т. е. третье главное направление, дается вектором $\{a_{11} - \lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$ при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

42. Третий случай. Все характеристические числа одинаковы: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, т. е. характеристическое уравнение (15) имеет трехкратный корень.

Имеет место следующее предложение: *если в систему* (14) *подставить трехкратный корень* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ *уравнения* (15), *то все уравнения системы* (14) *обратятся в тождества.* Таким образом, если характеристические числа квадратичной формы совпадают, то любое направление является для такой формы главным. Доказательство этого утверждения мы проведем в n° 44; пока примем его на веру.

Поскольку при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ система (14) сводится к тождествам, т. е. все коэффициенты этой системы обращаются в нуль, получаем: $a_{11} - \lambda = 0$, $a_{22} - \lambda = 0$, $a_{33} - \lambda = 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Следовательно, данная форма уже имеет канонический вид: $\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = \lambda (x^2 + y^2 + z^2)$ и ничего с ней делать не надо. Однако мы можем как угодно повернуть систему осей, и форма при этом сохранит канонический вид.

43. Общее заключение. *Каждую квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи преобразования прямоугольных координат.* Чтобы привести данную квадратичную форму к каноническому виду, нужно решить уравнение (15) и найти характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3; они и будут коэффициентами в каноническом виде формы. Координатные оси следует направить по главным направлениям формы. Если оси абсцисс, ординат и аппликат направлены соответственно по первому, второму и третьему главным направлениям, то λ_1 будет коэффициентом при квадрате абсциссы, λ_2 — при квадрате ординаты, λ_3 — при квадрате аппликаты.

Ясно, что тем самым дано также правило приведения к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка (1), поскольку его левая часть есть квадратичная форма.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-18=0. \tag{17}$$

Решение. Прежде всего составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$. Корни этого уравнения: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$. Тем самым мы уже знаем каноническое уравнение данной поверхности: $3x'^2+6y'^2+9z'^2-18=0$, или

$$\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{3}+\frac{z'^2}{2}=1.$$

Данная поверхность является эллипсоидом с полуосями $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$.

Если нас, кроме того, интересует расположение поверхности, то мы должны найти преобразование координат, приводящее уравнение (17) к каноническому виду; иначе говоря, придется искать главные направления поверхности.

Составим применительно к нашей задаче систему уравнений (14):

$$\left.\begin{aligned} (7-\lambda)\,l \quad -2m \qquad\qquad &=0, \\ -2l+(6-\lambda)\,m-2n &=0, \\ -2m+(5-\lambda)\,n &=0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Полагая здесь $\lambda=\lambda_1=3$, получим

$$\begin{aligned} 4l-2m \qquad &=0, \\ -2l+3m-2n &=0, \\ -2m+2n &=0. \end{aligned}$$

В качестве ненулевого решения этой системы можно взять, например, $l=1$, $m=2$, $n=2$; нормируя это решение, получим единичный вектор первого главного направления:

$$i'=\{l_1;\ m_1;\ n_1\}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Точно так же, полагая в системе (18) $\lambda=\lambda_2=6$ и $\lambda=\lambda_3=9$, найдем единичные векторы двух других главных направлений:

$$j'=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\},$$

$$k'=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}=\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}.$$

Положение новых осей относительно старой системы теперь нам известно, вместе с тем известно и расположение поверхности. Формулы преобразования координат найдем согласно равенствам (5):

$$x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z',$$
$$y=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z',$$
$$z=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'.$$

Заметим, что определитель, составленный из координат векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, равен $+1$; таким образом, условие (12а) § 6 соблюдено. Это значит, что мы перешли к новым координатам, сохранив ориентацию прежних осей.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+6=0. \tag{19}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^3-27\lambda-54=0$. Корни этого уравнения: $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$. Каноническое уравнение поверхности можем написать сразу: $-3x'^2-3y'^2+6z'^2+6=0$ или

$$\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{1}=1.$$

Данная поверхность является однополостным гиперболоидом вращения с полуосями $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$.

Найдем теперь главные направления данной поверхности и формулы преобразования координат, приводящие данное уравнение к каноническому виду. Так как характеристическое уравнение имеет двукратный корень, то нужно действовать согласно указаниям n° 41. Составим применительно к нашей задаче систему уравнений (14):

$$\begin{aligned} (1-\lambda)l \quad &+2m &-4n=0,\\ 2l+(-2-\lambda)m &&-2n=0,\\ -4l \quad &-2m+(1-\lambda)n=0. \end{aligned}$$

Подставим сюда двукратный корень характеристического уравнения $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$; мы получим

$$4l+2m-4n=0,$$
$$2l+m-2n=0,$$
$$-4l-2m+4n=0.$$

Система свелась к одному существенному уравнению:

$$2l+m-2n=0 \tag{20}$$

(два других ему пропорциональны; см. n° 41). Беря, например, решение $l=1$, $m=2$, $n=2$ уравнения (20), получим вектор $\{1;\ 2;\ 2\}$, который определяет одно из бесчисленного множества главных направлений, соответствующих числу $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$. С другой стороны, согласно n° 41 вектор $\{2;\ 1;\ -2\}$, определенный коэффициентами уравнения (20), дает третье главное направление (отвечающее числу $\lambda=\lambda_3=6$). Умножая векторно $\{2;\ 1;\ -2\}$ на $\{1;\ 2;\ 2\}$, получим вектор $\{6;\ -6;\ 3\}$, который также дает главное направление, отвечающее числу $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$ (но отличное от ранее найденного и перпендикулярное к нему). Вместо последнего вектора удобнее взять $\{2;\ -2;\ 1\}$. Нормируя найденные векторы и располагая их в надлежащем порядке, получим

$$i'=\{l_1;\ m_1;\ n_1\}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\},$$
$$j'=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}=\left\{\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right\},$$
$$k'=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Отсюда имеем формулы искомого преобразования координат:

$$x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z',$$
$$y=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z',$$
$$z=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'.$$

44. Теперь мы докажем предложения, которые в n° 41 и 42 были приняты на веру. Предварительно установим следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть соблюдены равенства*:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=0, \tag{21}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=0. \tag{22}$$

Тогда, если определитель (21) *симметричен относительно главной диагонали, т. е. если* $b_{12}=b_{21}$, $b_{13}=b_{31}$, $b_{23}=b_{32}$, *то все строки определителя* (21) *пропорциональны некоторой одной его строке.*

Доказательство. Будем доказывать лемму от противного. Предположим, что определитель (21) имеет две непропорциональные строки; для определенности будем считать, что непропорциональны его первые две строки. Отсюда получим противоречие с условиями леммы.

Рассмотрим векторы $\{b_{11};\ b_{12};\ b_{13}\}$, $\{b_{21};\ b_{22},\ b_{23}\}$, $\{b_{31};\ b_{32};\ b_{33}\}$. Наше предположение означает, что из этих векторов первые два неколлинеарны. Но согласно равенству (21) все эти векторы компланарны (см. Курс, n° 185); в таком случае третий вектор может быть разложен по двум первым (см. Курс, n° 159):

$$\{b_{31};\ b_{32};\ b_{33}\}=\lambda\{b_{11};\ b_{12};\ b_{13}\}+\mu\{b_{21};\ b_{22};\ b_{23}\}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} b_{31}&=\lambda b_{11}+\mu b_{21},\\ b_{32}&=\lambda b_{12}+\mu b_{22},\\ b_{33}&=\lambda b_{13}+\mu b_{23}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Пользуясь условием симметрии данного определителя и равенствами (23), имеем

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ \lambda b_{11}+\mu b_{21} & \lambda b_{13}+\mu b_{23}\end{vmatrix}=$$

$$=\mu\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{21} & b_{23}\end{vmatrix}=\mu\begin{vmatrix} b_{11} & \lambda b_{11}+\mu b_{21}\\ b_{21} & \lambda b_{12}+\mu b_{22}\end{vmatrix}=\mu^2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}.$$

Заменяя в левой части равенства (22) второй и третий определители найденными выражениями, получим

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}(1+\mu^2+\lambda^2)=0.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=0.$$

Далее, имеем

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{21} & b_{23}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & \lambda b_{11}+\mu b_{21}\\ b_{21} & \lambda b_{12}+\mu b_{22}\end{vmatrix}=\mu\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13}\\ b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{12} & \lambda b_{11}+\mu b_{21}\\ b_{22} & \lambda b_{12}+\mu b_{22}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} b_{12} & b_{11}\\ b_{22} & b_{12}\end{vmatrix}=0.$$

Итак, мы получим три равенства:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{21} & b_{23}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13}\\ b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}=0.$$

Но эти равенства означают пропорциональность первых двух строк определителя (21). Таким образом, при условиях леммы нельзя допустить, что первые две строчки непропорциональны. Точно так же мы получили бы противоречие, допустив непропорциональность каких-нибудь других двух строк. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если соблюдены условия первой леммы и, кроме того,*

$$b_{11}+b_{22}+b_{33}=0, \tag{24}$$

то все элементы определителя (21) *равны нулю.*

Доказательство. Так как соблюдены условия первой леммы, то мы можем ее применить; согласно лемме, все строки определителя (21) пропорциональны и, следовательно, все миноры второго порядка этого определителя равны нулю. В частности,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$b_{11}b_{22} = b_{12}^2, \quad b_{11}b_{33} = b_{13}^2, \quad b_{22}b_{33} = b_{23}^2. \tag{25}$$

Таким образом, $b_{11}b_{22} \geqslant 0$, $b_{11}b_{33} \geqslant 0$, $b_{22}b_{33} \geqslant 0$; поэтому числа b_{11}, b_{22}, b_{33} не могут иметь разных знаков. Но тогда из (24) следует, что $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$. После этого из (25) имеем: $b_{12} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$. Лемма доказана.

Нам потребуется еще некоторые сведения из алгебры многочленов. Пусть дан многочлен третьей степени:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \tag{26}$$

Известно, что он может быть записан следующим образом:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \tag{27}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — определенные числа, называемые корнями данного многочлена. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то $\lambda_1 = \lambda_2$ есть двукратный корень многочлена; в этом случае

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_3). \tag{28}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то имеем трехкратный корень; в этом случае

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3. \tag{29}$$

Справедливы следующие утверждения:

1) Если λ_1 — вообще какой-нибудь корень данного многочлена, то, полагая в выражении (26) $\lambda = \lambda_1$, мы должны получить

$$f(\lambda_1) = 0.$$

Это сразу усматривается из (27).

2) Если λ_1 — двукратный корень, то при $\lambda = \lambda_1$ обращается в нуль не только сам многочлен, но и его первая производная:

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0,$$

однако $f''(\lambda_1) \neq 0$. Чтобы доказать это утверждение, достаточно продифференцировать (28):

$$f'(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3) + (\lambda - \lambda_1)^2.$$

Подставляя сюда $\lambda = \lambda_1$, видим, что $f'(\lambda_1) = 0$. Поскольку

$$f''(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_3) + 4(\lambda - \lambda_1) \quad \text{и} \quad \lambda_1 \neq \lambda_3, \quad \text{то} \quad f''(\lambda_1) \neq 0.$$

3) Если λ_1 — трехкратный корень, то

$$f(\lambda_1) = 0, \quad f'(\lambda_1) = 0, \quad f''(\lambda_1) = 0$$

(однако $f'''(\lambda_1) \neq 0$). Для доказательства достаточно продифференцировать (29):

$$f'(\lambda) = 3(\lambda - \lambda_1)^2, \quad f''(\lambda) = 6(\lambda - \lambda_1).$$

Полагая $\lambda = \lambda_1$, находим: $f'(\lambda_1) = 0$, $f''(\lambda_1) = 0$ $(f'''(\lambda) = 6 \neq 0)$. Эти признаки кратности корня будут сейчас использованы.

Вернемся к предложениям, которые были высказаны в n° 41, 42 и остались недоказанными.

Обозначим через $f(\lambda)$ многочлен третьей степени, который стоит в левой части характеристического уравнения данной квадратичной формы:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Найдем производную многочлена $f(\lambda)$:

$$f'(\lambda)=\begin{vmatrix} -1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -1 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая эти определители, получим

$$f'(\lambda)=-\left(\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}\right).$$

Отсюда

$$f''(\lambda)=2\left[(a_{11}-\lambda)+(a_{22}-\lambda)+(a_{33}-\lambda)\right].$$

Рассмотрим теперь возможные случаи кратности корня характеристического уравнения данной формы, о которых шла речь в n° 41, 42.

1) Пусть λ_1 — двукратный корень характеристического уравнения. Тогда

$$f(\lambda_1)=0, \quad f'(\lambda_1)=0.$$

Таким образом, при $\lambda=\lambda_1$ для определителя (30) соблюдены условия первой леммы этого n° (считая $b_{11}=a_{11}-\lambda$, $b_{12}=a_{12}$ и т. д). Применяя лемму, заключаем, что все строки определителя (30) пропорциональны некоторой одной строке; при этом найдется хотя бы одна строка, не состоящая сплошь из нулей (так как $f''(\lambda_1)\neq 0$, то хотя бы одно из чисел $a_{11}-\lambda$, $a_{22}-\lambda$, $a_{33}-\lambda$ $(\lambda=\lambda_1)$ отлично от нуля). Учтем, что строчки определителя (30) составлены из коэффициентов системы (14). Следовательно, при $\lambda=\lambda_1$ в системе (14) имеется одно существенное уравнение, а другие ему пропорциональны и, значит, являются его следствиями. Именно это и утверждалось в n° 41.

2) Пусть $\lambda=\lambda_1$ — трехкратный корень характеристического уравнения. Тогда

$$f(\lambda_1)=0, \quad f'(\lambda_1)=0, \quad f''(\lambda_1)=0.$$

Таким образом, при $\lambda=\lambda_1$ для определителя (30) соблюдены условия второй леммы этого пункта. Применяя лемму, заключаем, что $a_{11}-\lambda_1=0$, $a_{22}-\lambda_1=0$, $a_{33}-\lambda_1=0$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{23}=0$. Следовательно, при $\lambda=\lambda_1$ все коэффициенты системы (14) обращаются в нуль и система (14) сводится к тождествам. Тем самым утверждение n° 42 доказано.

§ 9. Инварианты и классификация квадратичных форм от трех аргументов

45. В предыдущем параграфе мы указали определенный способ приведения данной квадратичной формы от трех аргументов к каноническому виду. Заранее не ясно, не может ли случиться, что с помощью какого-то другого преобразования прямоугольных координат данная квадратичная форма приведется к другому каноническому виду? Покажем, что этого не может быть. Иначе говоря, *каждая квадратичная форма от трех аргументов имеет единственный канонический вид* (не считая возможности поменять ролями абсциссу, ординату и аппликату). Следует оговорить, что единственность квадратичной формы имеет место при условии, что употребляются только прямоугольные координатные системы с одним и тем же масштабом.

46. Перейдем к доказательству нашего утверждения. Обозначим буквой Ф величину данной квадратичной формы:

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz. \quad (1)$$

Согласно равенству (1) каждой точке $M(x;\ y;\ z)$ сопоставляется число Ф; оно называется значением формы в точке M.

Приведем данную форму к каноническому виду, следуя указаниям § 8. Тогда значение Ф в точке M будет выражено равенством:

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \quad (2)$$

где x', y', z' — новые координаты точки M, λ_1, λ_2, λ_3 — характеристические числа формы Ф.

Предположим, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$; в таком случае из (2) следует

$$\lambda_1 (x'^2 + y'^2 + z'^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3 (x'^2 + y'^2 + z'^2). \quad (3)$$

Поскольку $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то такие же соотношения имеем и в старых координатах:

$$\lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3 (x^2 + y^2 + z^2). \quad (4)$$

Ограничим возможные положения точки M, требуя, чтобы она находилась на единичной сфере:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

При этом условии все возможные значения Φ (отвечающие любым положениям точки M на единичной сфере) заключены между λ_1 и λ_3, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_3. \tag{5}$$

Эти границы являются точными. Именно если $x' = \pm 1$, $y' = 0$, $z' = 0$, то $\Phi = \lambda_1$; если $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \pm 1$, то $\Phi = \lambda_3$. Из этих рассуждений следует, что если данная форма будет приведена к каноническому виду каким-нибудь другим способом (в других координатах), то наименьший и наибольший из коэффициентов этого канонического вида снова окажутся числами λ_1 и λ_3 (в противном случае данная форма на единичной сфере имела бы другие границы изменения, что невозможно). Покажем, что данная форма не может приводиться к различным каноническим видам, которые отличаются средним по величине коэффициентом. Допустим, что в каких-то координатах данная форма получила канонический вид:

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

где $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$. Тогда на единичной сфере всюду, где $x' \neq 0$ или $y' \neq 0$, будет

$$\Phi = \lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2 < \lambda_3 (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda_3,$$

т. е.

$$\Phi < \lambda_3.$$

Только в двух точках единичной сферы: ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = +1$) и ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = -1$) имеем:

$$\Phi = \lambda_3.$$

Таким образом, на единичной сфере есть единственная пара диаметрально противоположных точек, где Φ достигает наибольшего значения. Именно через эти точки и проходит ось аппликат той координатной системы, в которой форма имеет канонический вид.

Так же доказывается, что на единичной сфере есть единственная пара диаметрально противоположных точек, где Φ достигает наименьшего значения: $\Phi = \lambda_1$. Через эти точки проходит ось абсцисс координатной системы, в которой форма имеет канонический вид. Мы видим, что положение двух осей этой координатной системы определено единственным образом; следовательно, и вся система осей однозначно определена (не считая возможности менять на осях положительные и отрицательные направления). Поскольку в случае $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$ не может быть другой координатной системы, в которой форма $\lambda_1 x'^2 + \mu y'^2 + \lambda_3 z'^2$ также имеет канонический вид, не может быть и другого канонического вида. В частности, имеем: $\mu = \lambda_2$.

Остается рассмотреть случаи $\lambda_1 = \mu < \lambda_3$ и $\lambda_1 < \mu = \lambda_3$. Если $\lambda_1 = \mu < \lambda_3$, то на единичной сфере максимум $\Phi = \lambda_3$ имеет место, как и раньше, в единственной паре точек $(0,\ 0,\ \pm 1)$, а минимум $\Phi = \lambda_1$ достигается во всех точках, где $z' = 0$ (т. е. на всем экваторе). Поэтому теперь только ось аппликат имеет определенное положение. Если вращать систему осей вокруг неподвижной оси аппликат, то будет $\mu = \lambda_1$. Поскольку μ не может меняться, имеем и в этом случае $\mu = \lambda_2$. Предположение $\lambda_1 < \mu = \lambda_3$ рассматривается аналогично. Итак, данная квадратичная форма приводится к единственному каноническому виду: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ (не считая возможности переименовать координаты).

47. Пусть дана произвольная квадратичная форма

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

и пусть совершается преобразование координат:

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \end{aligned}$$

при любом повороте системы осей.

Заменяя x, y, z в выражении Φ по этим формулам, приведем Φ к новым (прямоугольным) координатам:

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \\ & = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z'. \quad (6) \end{aligned}$$

Поскольку квадратичные формы, написанные здесь слева и справа, преобразуются друг в друга, они приводятся к одному и тому же каноническому виду. Следовательно, обе эти формы имеют одни и те же характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3. Напишем характеристическое уравнение для первоначально данной формы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Развертывая определитель, получим

$$\lambda^3-\sigma\lambda^2+\varkappa\lambda-\delta=0, \tag{7}$$

где

$$\sigma=a_{11}+a_{22}+a_{33}, \tag{8}$$

$$\varkappa=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Напишем также характеристическое уравнение для формы, стоящей в правой части равенства (6):

$$\lambda^3-\sigma'\lambda^2+\varkappa'\lambda-\delta'=0. \tag{11}$$

Здесь σ', $\varkappa'$, δ' — величины, которые выражаются равенствами (8), (9), (10), если в них $a_{11}, \ldots, a_{33}$ заменить через $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$. Уравнение (7) и (11) имеют одни и те же корни: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, следовательно, не отличаются друг от друга. Таким образом,

$$\sigma'=\sigma, \quad \varkappa'=\varkappa, \quad \delta'=\delta.$$

Мы видим, что величины σ, $\varkappa$, δ не меняются при любом преобразовании формы к новым прямоугольным координатам (с тем же масштабом). Поэтому их называют *инвариантами* формы относительно преобразования прямоугольных координат. Особенно важным из них является инвариант

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

который называется дискриминантом данной квадратичной формы. Из выражения (27) п° 44 видно, что

$$\delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{13}$$

48. Квадратичную форму от трех аргументов будем называть *эллиптической*, если ее характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3 все отличны от нуля и имеют одинаковые знаки; *гиперболической*, если λ_1, λ_2, λ_3 все отличны от нуля, но среди них встречаются числа разных знаков; *параболической*, если хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, λ_3 равно нулю.

Согласно (13) *параболические формы характеризуются условием* $\delta=0$.

Рассмотрим эллиптическую форму Φ; допустим, что ее характеристические числа положительны: $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$. Тогда из неравенств (3) n° 46 следует, что в любой точке $M(x, y, z)$, не считая начала координат, величина $\Phi>0$. Такая форма называется *положительно определенной*. Если точка $M(x, y, z)$ обегает единичную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ и если $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$, то положительно определенная форма изменяется в положительных границах $0<\lambda_1\leqslant\Phi\leqslant\lambda_3$. Допустим, что $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$ $(\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3)$. Тогда из неравенств (3) следует, что в любой точке (кроме начала координат) будет $\Phi<0$. Такая форма называется *отрицательно определенной*. На единичной сфере отрицательно определенная форма изменяется в отрицательных границах $\lambda_1\leqslant\Phi\leqslant\lambda_3<0$. Итак, *каждая эллиптическая форма является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной*.

Рассмотрим теперь гиперболическую форму: если $\lambda_1\leqslant\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$, то $\lambda_1<0$, $\lambda_3>0$. Таким образом, на единичной сфере форма Φ изменяется в границах λ_1, λ_3, одна из которых отрицательна, другая положительна. Отсюда, в частности, следует, что *гиперболическая форма является знакопеременной*.

49. Если $\delta\neq0$, то форма будет либо эллиптической, либо гиперболической. Чтобы установить, к какому из этих типов относится данная форма, нужно определить знаки ее характеристических чисел, т. е. знаки корней характеристического уравнения. Поскольку мы уже знаем, что характеристическое уравнение имеет только вещественные корни, к нему применима известная в алгебре теорема Декарта*):

---

*) Доказательство теоремы Декарта можно найти, например, в книге А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры» (Физматгиз, 1962, стр. 258).

если все корни уравнения вещественны и свободный член отличен от нуля, то число положительных корней этого уравнения равно числу перемен знаков в системе его коэффициентов (при этом кратный корень учитывается столько раз, какова его кратность). Так как общее число корней характеристического уравнения известно (равно трем), то, применяя к этому уравнению теорему Декарта, мы найдем, сколько данная форма имеет положительных и сколько отрицательных характеристических чисел, и тем самым получим полную характеристику данной формы.

Пример. Определить тип квадратичной формы

$$\Phi = 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Система коэффициентов того уравнения имеет следующие знаки, которые мы выписываем отдельно от коэффициентов: $+ - + -$. Перемена знака происходит при переходе от первого коэффициента ко второму, затем при переходе от второго к третьему и, наконец, при переходе от третьего к четвертому. Общее число перемен знака равно трем. Следовательно, все три характеристических числа положительны: форма является эллиптической и положительно определенной.

Заметим, что в данном случае легко находятся и сами корни: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Зная их, мы можем установить границы изменения данной формы на единичной сфере: если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$3 \leqslant 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz \leqslant 9.$$

Пример. Определить тип квадратичной формы

$$\Phi = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. В системе его коэффициентов есть одна перемена знака (при переходе от первого к следующему коэффициенту). Таким образом, имеется одно положительное характеристическое число и два отрицательных. Данная форма является гиперболической.

§ 10. Приведение к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка

50. Пусть дано общее уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Левую часть уравнения (1) образуют следующие группы членов:

1) квадратичная форма, состоящая из старших членов:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz;$$

2) линейная форма членов первой степени

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z;$$

3) свободный член a_{44}.

Наша цель — путем перехода к новым прямоугольным координатам привести уравнение (1) к каноническому виду и тем самым установить вид данной поверхности. Когда мы говорим о приведении уравнения (1) к каноническому виду, то имеем в виду следующее: 1) нужно добиться, чтобы получила канонический вид квадратичная форма старших членов; 2) кроме того, чтобы число членов первой степени стало наименьшим (если возможно, совсем их уничтожить); 3) кроме того, если возможно, уничтожить свободный член.

Решение этой задачи проводится в общем так же, как решение аналогичной задачи для кривых второго порядка (чем мы занимались в § 4).

Предположим, что система координатных осей как-нибудь поворачивается; тогда координаты изменятся по формулам вида

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если мы заменим x, y, z в уравнении (1) их выражениями по формулам (2), то каждая из указанных выше групп членов левой части уравнения преобразуется автономно (не влияя на другие). Направим новые координатные оси по главным направлениям квадратичной формы старших членов (их называют также главными направлениями данной поверхности). Тогда

1) квадратичная форма старших членов примет канонический вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=\\ =\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2;$$

2) группа членов первой степени перейдет в аналогичную группу членов с другими коэффициентами:

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z=2\mu_1x'+2\mu_2y'+2\mu_3z';$$

3) свободный член останется без изменения.

Мы получим уравнение данной поверхности в новых координатах:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2\mu_1x+2\mu_2y+2\mu_3z+a_{44}=0. \quad (3)$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения производится в зависимости от типа квадратичной формы старших членов.

51. Предположим, что дискриминант формы старших членов отличен от нуля: $\delta\neq 0$. Так как $\delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, то $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_3\neq 0$ и мы можем уравнение (3) переписать так:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(z'+\frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)^2=$$

$$=-a_{44}+\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}+\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}+\frac{\mu_3^2}{\lambda_3}. \quad (4)$$

Совершим параллельный перенос системы осей Ox', Oy', Oz' с расчетом, чтобы координаты изменились по формулам:

$$x'=x''-\frac{\mu_1}{\lambda_1},\quad y'=y''-\frac{\mu_2}{\lambda_2},\quad z'=z''-\frac{\mu_3}{\lambda_3}.$$

Если мы обозначим правую часть (4) одной буквой H, то уравнение данной поверхности в последних координатах примет канонический вид:

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2=H. \quad (5)$$

В случае $H\neq 0$ уравнение (5) можно переписать так:

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}}+\frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}}+\frac{z''^2}{\frac{H}{\lambda_3}}=1. \quad (6)$$

Возможны два случая.

1) Квадратичная форма старших членов данного уравнения является *эллиптической*; тогда числа λ_1, λ_2, λ_3 одного знака. Будем считать, что $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$.

Если при этом $H>0$, то уравнение (5) приводится к виду (6) и определяется *эллипсоид* *) с полуосями

$$a=\sqrt{\frac{H}{\lambda_1}},\quad b=\sqrt{\frac{H}{\lambda_2}},\quad c=\sqrt{\frac{H}{\lambda_3}}.$$

Если $H=0$, то уравнение (5) определяет единственную вещественную точку: $x''=0$, $y''=0$, $z''=0$. Однако можно говорить, что в этом случае уравнение (5) определяет *мнимый конус*. Мнимый конус можно считать также *вырожденным эллипсоидом* (считая, что уравнение (5) при $H=0$ получается в пределе при $H\to 0$).

Если $H<0$, то уравнение (5) никакого вещественного образа не определяет. В этом случае говорят также, что уравнение (5) есть *уравнение мнимого эллипсоида*.

2) Квадратичная форма старших членов данного уравнения является *гиперболической*; тогда среди чисел λ_1, λ_2, λ_3 два будут иметь одинаковые знаки и одно — противоположный знак. Будем считать, что $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3<0$.

Если при этом $H>0$, то уравнение (5) приводится к виду (6) и может быть написано еще таким образом:

$$\frac{x''^2}{\frac{H}{\lambda_1}}+\frac{y''^2}{\frac{H}{\lambda_2}}-\frac{z''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_3}\right|}=1.$$

Это уравнение определяет *однополостный гиперболоид*.

Если $H<0$, то, деля почленно уравнение (5) на положительное число $-H$, приведем его к виду

$$\frac{x''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_1}\right|}+\frac{y''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_2}\right|}-\frac{z''^2}{\left|\frac{H}{\lambda_3}\right|}=-1.$$

Такое уравнение определяет *двухполостный гиперболоид*.

Наконец, если $H=0$, то, переписав уравнение (5) следующим образом:

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2-|\lambda_3|\,z''^2=0, \tag{7}$$

видим, что в этом случае оно определяет *вещественный конус*.

---

*) Классификацию поверхностей второго порядка см. Курс, § 69—72.

Заметим, что уравнение (5) при $H=0$ получается из уравнения того же вида при $H \neq 0$ путем предельного перехода, если $H \to 0$. Поэтому *вещественный конус второго порядка можно рассматривать как вырождение однополостного или двухполостного гиперболоида* (в зависимости от того, как стремится H к нулю, оставаясь положительным или отрицательным). На рис. 6 изображен конус и два близких к нему гиперболоида (однополостный и двухполостный). Эти три поверхности соответствуют случаям $H=0$, $H>0$ и $H<0$; когда H приближается к нулю, то оба гиперболоида приближаются к конусу, как к пределу.

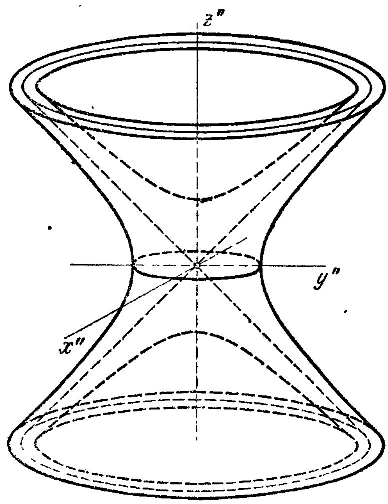

Рис. 6.

52. Предположим теперь, что квадратичная форма старших членов уравнения (1) имеет дискриминант $\delta = 0$. Так как $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, то на этот раз хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2, λ_3 равно нулю (т. е. квадратичная форма является *параболической*). Будем считать, что $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ (все три числа λ_1, λ_2, λ_3 не могут исчезнуть, так как при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ сама форма была бы тождественна нулю). Возможны два случая.

1) $\lambda_2 \neq 0$; тогда из (3) имеем уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0, \tag{8}$$

или

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2\mu_3 z' + H = 0, \tag{9}$$

где $H = a_{44} - \dfrac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \dfrac{\mu_2^2}{\lambda_2}$.

Если $\mu_3 \neq 0$, то, вводя еще новые координаты x'', y'', z'' по формулам

$$x' = x'' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad z' = z'' - \frac{H}{2\mu_3},$$

получим из (9) каноническое уравнение данной поверхности:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2\mu_3 z'' = 0.$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$2z'' = \frac{x''^2}{-\frac{\mu_3}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{\mu_3}{\lambda_2}}. \tag{10}$$

Мы видим, что при $\mu_3 \neq 0$ уравнение (8) определяет *параболоид* (эллиптический или гиперболический в зависимости от знаков знаменателей в правой части (10)). Если $\mu_3 = 0$, то уравнение (8) приводится к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + H = 0$$

и, следовательно, определяет *эллиптический* или *гиперболический* цилиндр.

2) $\lambda_2 = 0$; тогда из (8) имеем уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + a_{44} = 0, \tag{11}$$

или

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 y' + 2\mu_3 z' + H = 0, \tag{12}$$

где $H = a_{44} - \dfrac{\mu_1^2}{\lambda_1}$.

Если $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$, то мы повернем систему осей Ox', Oy', Oz' вокруг оси Ox' на угол α, беря $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\mu_2}{\mu_3}$ и отсчитывая угол α от оси Oy' к оси Oz'; систему повернутых осей перенесем параллельно на величину $-\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}$ вдоль оси Ox'. Соответствующее преобразование координат дается формулами

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \\ y'' &= \frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z', \\ z'' &= -\frac{\mu_2}{\mu} y' + \frac{\mu_3}{\mu} z', \end{aligned}$$

где $\mu=\sqrt{\mu_2^2+\mu_3^2}$. В силу этого преобразования уравнение (12) примет вид

$$\lambda_1 x''^2+2\mu y''+H=0. \qquad (13)$$

Производя еще параллельный перенос полученных осей на величину $\frac{H}{2\mu}$ вдоль оси ординат $\left(\text{что соответствует преобразованию } x''=x''',\ y''=y'''-\frac{H}{2\mu}\right)$, найдем каноническое уравнение данной поверхности:

$$\lambda_1 x'''^2+2\mu y'''=0.$$

Мы видим, что при наших предположениях ($\mu_2\neq 0$, $\mu_3\neq 0$) уравнение (12) определяет *параболический цилиндр*.

Если в уравнении (12) будет $\mu_2\neq 0$, $\mu_3=0$, то оно приводится к виду (13) одним лишь параллельным переносом системы осей Ox', Oy', Oz' вдоль Ox' на величину $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ и, следовательно, также определяет параболический цилиндр. В случае $\mu_2=0$, $\mu_3\neq 0$ дело сводится к предыдущему, если поменять ролями y' и z'.

Наконец, если $\mu_2=0$, $\mu_3=0$, то уравнение (12) очевидным образом приводится к каноническому виду:

$$\lambda_1 x''^2+H=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) определяет *пару параллельных плоскостей* (вещественных при $\lambda_1>0$, $H\leqslant 0$, мнимых при $\lambda_1>0$, $H>0$).

Замечание. Как установлено выше, уравнение (8) при условии $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\mu_3\neq 0$ определяет параболоид. Если $\mu_3\to 0$ или $\lambda_2\to 0$, то в пределе из (8) получается уравнение цилиндра. Поэтому *цилиндры второго порядка можно считать вырожденными параболоидами.*

53. Подводя итог проведенному исследованию, мы можем сделать следующее заключение:

Если группа старших членов уравнения (1) *является эллиптической, то это уравнение определяет эллипсоид* (обыкновенный, мнимый или вырожденный); *если группа старших членов является гиперболической, то уравнение* *определяет гиперболоид* (однополостный, двухполостный или вырожденный); *если группа старших членов является параболической* ($\delta=0$), *то уравнение определяет параболоид* (эллиптический, гиперболический или вырожденный).

§ 11. Уравнения центра. Признак вырождения поверхности второго порядка. Примеры

54. Если нужно привести к каноническому виду общее уравнение поверхности второго порядка, обладающей центром, то имеет смысл прежде всего перенести начало координат в центр поверхности, после чего нужным образом повернуть оси. Имея в виду такой план, выведем уравнения, которые определяют центр поверхности второго порядка (если он есть) непосредственно по общему уравнению этой поверхности.

55. Некоторую точку S мы называем *центром* данной поверхности второго порядка, если после переноса начала координат в точку S уравнение поверхности не будет содержать членов первой степени (см. n° 34).

Пусть дана поверхность второго порядка:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (1)$$

Требуется найти ее центр (или убедиться, что центра нет). Предполагая, что центр имеется, обозначим его, как и раньше, буквой S; обозначим через x_0, y_0, z_0 искомые координаты центра (в данной координатной системе). Перенесем начало координат в точку S; при этом координаты произвольной точки изменятся по формулам:

$$x=\tilde{x}+x_0, \quad y=\tilde{y}+y_0, \quad z=\tilde{z}+z_0. \qquad (2)$$

Перейдем в уравнении (1) к новым координатам. Чтобы упростить запись дальнейших соотношений, обозначим всю левую часть уравнения (1) символом $F(x, y, z)$. Заменяя здесь x, y, z их выражениями по формулам (2), получим

$$F(x, y, z)=F(\tilde{x}+x_0, \tilde{y}+y_0, \tilde{z}+z_0)= \\ =a_{11}\tilde{x}^2+a_{22}\tilde{y}^2+a_{33}\tilde{z}^2+2a_{12}\tilde{x}\tilde{y}+2a_{13}\tilde{x}\tilde{z}+ \\ +2a_{23}\tilde{y}\tilde{z}+2A_{14}\tilde{x}+2A_{24}\tilde{y}+2A_{34}\tilde{z}+A_{44}, \qquad (3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{14} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ A_{24} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ A_{34} &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}, \\ A_{44} &= F(x_0, y_0, z_0); \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

коэффициенты старших членов остаются прежними.

Преобразование левой части уравнения (1) происходит согласно этим формулам в любом случае, т. е. независимо от того, что представляет собой точка S. Точка S будет центром, если $A_{14}=0$, $A_{24}=0$, $A_{34}=0$. Отсюда получаем уравнения центра:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решая их совместно, найдем центр $S(x_0, y_0, z_0)$. Система (5) может оказаться несовместной; тогда центра у данной поверхности нет. Напишем определитель системы (5):

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

он совпадает с уже известным нам дискриминантом группы старших членов.

Если $\delta \neq 0$, то система (5) совместна и имеет единственное решение. Следовательно, если $\delta \neq 0$, то данная поверхность имеет единственный центр. Такая поверхность второго порядка называется *центральной*. В случае центральной поверхности координаты центра выражаются следующими формулами:

$$x_0 = \frac{\delta_x}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_y}{\delta}, \quad z_0 = \frac{\delta_z}{\delta}, \tag{6}$$

где δ_x — определитель третьего порядка, который получается из определителя δ при помощи замены элементов его первого столбца числами $-a_{14}$, $-a_{24}$, $-a_{34}$; δ_y и δ_z получаются из определителя δ путем аналогичной замены элементов его второго и соответственно третьего столбца (см. Курс, Приложение, § 5).

Из формул (4) и (6) найдем A_{44}. Мы имеем:

$$A_{44}=F(x_0,\ y_0,\ z_0)=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})\,x_0+ \\ +(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})\,y_0+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+ \\ +a_{33}z_0+a_{34})\,z_0+(a_{41}x_0+a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44}).$$

Отсюда и вследствие системы (5)

$$A_{44}=a_{41}x_0+a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44}. \tag{7}$$

Используя (6), получим

$$A_{44}=\frac{a_{41}\delta_x+a_{42}\delta_y+a_{43}\delta_z+a_{44}\delta}{\delta}.$$

Числитель этой дроби может быть записан в виде определителя четвертого порядка:

$$a_{41}\delta_x+a_{42}\delta_y+a_{43}\delta_z+a_{44}\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (8), проще всего разложить написанный справа определитель по элементам последней строки и установить, что алгебраические дополнения элементов этой строки совпадают с величинами δ_x, δ_y, δ_z, δ (см. Курс, Приложение, § 6).

Определитель (8) называется дискриминантом левой части уравнения (1) и обозначается символом Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Из равенства (8) окончательно имеем

$$A_{44}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Итак, если поверхность, заданная уравнением (1), является центральной ($\delta\neq 0$), то после переноса начала координат в ее центр данное уравнение приводится к виду

$$a_{11}\tilde{x}^2+a_{22}\tilde{y}^2+a_{33}\tilde{z}^2+2a_{12}\tilde{x}\tilde{y}+2a_{13}\tilde{x}\tilde{z}+2a_{23}\tilde{y}\tilde{z}+\frac{\Delta}{\delta}=0; \tag{9}$$

старшие коэффициенты — прежние. Совершая теперь надлежащий поворот осей, можно привести уравнение (9) к каноническому виду:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \qquad (10)$$

56. Сравнивая последнее уравнение с уравнением (5) § 10, мы видим, что свободный член H в уравнении (5) § 10 может быть подсчитан по данному уравнению (1) сразу, без того, чтобы фактически выполнять преобразование координат; именно, $H = -\frac{\Delta}{\delta}$.

В § 10 установлено, что уравнение (5) определяет вырожденную поверхность (конус) при $H=0$. Отсюда заключаем: центральная поверхность второго порядка является вырожденной тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Укажем (уже без доказательства), что равенство $\Delta = 0$ характеризует также и вырожденные параболоиды (т. е. цилиндры). Таким образом, справедливо общее утверждение: *уравнение* (1) *определяет вырожденную поверхность* (конус или цилиндр) *в том и только в том случае, когда* $\Delta = 0$.

Отсюда уже следует, что цилиндры, как вырожденные параболоиды, характеризуются двумя условиями: $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

57. Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 18 = 0.$$

Решение. Прежде всего подсчитаем δ:

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162.$$

Так как $\delta \neq 0$, то данное уравнение определяет центральную поверхность. Координаты центра могут быть найдены из уравнений (5), которые в данном случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 7x_0 - 2y_0 \qquad\qquad - 3 &= 0, \\ -2x_0 + 6y_0 - 2z_0 - 12 &= 0, \\ -2y_0 + 5z_0 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$. Перенесем начало координат в точку $S(1;\ 2;\ -1)$; при этом координаты преобразуются по формулам

$$x = \tilde{x} + 1, \quad y = \tilde{y} + 2, \quad z = \tilde{z} - 1,$$

а данное уравнение принимает вид

$$7\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2+5\tilde{z}^2-4\tilde{x}\,\tilde{y}-4\tilde{y}\,\tilde{z}-18=0. \qquad (*)$$

Свободный член полученного уравнения мы подсчитали по формуле (7): $A_{44}=-3x_0-12y_0+9z_0+18=-18$. Можно поступить иначе: именно имея

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 18 \end{vmatrix}=-2916,$$

найдем $A_{44}=\frac{\Delta}{8}=-18$. Производя дальнейшее преобразование (*) согласно n° 43, получим каноническое уравнение данной поверхности: $3x'^2+6y'^2+9z'^2-18=0$.

П р и м е р. Привести к каноническому виду уравнение

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0. \qquad (11)$$

Р е ш е н и е. Подсчитаем дискриминант старших членов:

$$\delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Так как $\delta=0$, то данная поверхность н е я в л я е т с я ц е н т р а л ь н о й, и мы начнем с упрощения группы старших членов (см. n° 50 и 52).

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0.$$

Корни этого уравнения суть $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=0$. Составим применительно к данной задаче систему уравнений (14) § 8:

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)\,l+2m+n&=0, \\ 2l+(2-\lambda)\,m+n&=0, \\ l+m+(3-\lambda)\,n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Полагая в уравнениях (3) $\lambda=\lambda_1=2$, получим

$$\begin{aligned} 2m+n&=0, \\ 2l\qquad +n&=0, \\ l+m+n&=0. \end{aligned}$$

В качестве ненулевого решения этой системы можно взять, например, $l=1$, $m=1$, $n=-2$; соответственно имеем вектор $a_1=\{1;\ 1;\ -2\}$, определяющий первое главное направление.

Полагая в уравнениях (3) $\lambda=\lambda_2=5$, получим

$$\begin{aligned} -3l+2m+n&=0,\\ 2l-3m+n&=0,\\ l+m-2n&=0. \end{aligned}$$

В качестве ненулевого решения этой системы можно взять, например $l=1$, $m=1$, $n=1$; соответственно имеем вектор второго главного направления $a_2=\{1;\ 1;\ 1\}$. Полагая в уравнениях (3) $\lambda=\lambda_3=0$, получим

$$\begin{aligned} 2l+2m+n&=0,\\ 2l+2m+n&=0,\\ l+m+3n&=0. \end{aligned}$$

В качестве ненулевого решения этой системы можно взять, например, $l=1$, $m=-1$, $n=0$; соответственно имеем вектор $a_3=\{1;\ -1;\ 0\}$, идущий по третьему главному направлению.

Направим новые оси по векторам a_1, a_2, a_3. Чтобы составить формулы преобразований координат, найдем базисные векторы новых осей:

$$i'=\frac{a_1}{|a_1|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$j'=\frac{a_2}{|a_2|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$k'=\frac{a_3}{|a_3|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right\}.$$

Отсюда и согласно n° 26 получаем искомые формулы:

$$x=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$z=-\frac{2}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'.$$

Зная корни характеристического уравнения, мы можем сразу написать результат преобразования группы старших членов уравнения (2) к новым координатам; именно мы получим $2x'^2+5y'^2$. Остальные члены уравнения (2) приведем к новым координатам, пользуясь предыдущими формулами:

$$-4x+6y-2z+3=\sqrt{6}x'-5\sqrt{2}z'+3.$$

Таким образом, уравнение данной поверхности в новых координатах имеет вид

$$2x'^2+5y'^2+\sqrt{6}x'-5\sqrt{2}z'+3=0,$$

или, после некоторой перегруппировки членов,

$$2\left(x'^2+\frac{\sqrt{6}}{2}x'\right)+5y'^2-5\sqrt{2}z'+3=0.$$

Дополняя выражение внутри круглой скобки до полного квадрата, получим

$$2\left(x'+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+5y'^2-5\sqrt{2}\left(z'-\frac{9\sqrt{2}}{40}\right)=0.$$

Совершим теперь параллельный перенос осей так, чтобы координаты преобразовались по формулам:

$$x'=x''-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$y'=y'',$$
$$z'=z''+\frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

Мы получили каноническое уравнение данной поверхности:

$$2x''^2+5y''^2-5\sqrt{2}z''=0,$$

или

$$5\sqrt{2}z''=2x''^2+5y''^2.$$

Данная поверхность является *эллиптическим параболоидом*.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

§ 12. Линейные преобразования на плоскости

58. Мы будем рассматривать некоторую плоскость α. Отметим на этой плоскости какую-нибудь точку O. Тогда любая точка M плоскости α определяет радиус-вектор $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$. Если нам заранее дан произвольный вектор $\boldsymbol{x}$, лежащий в плоскости α, то мы будем считать его приложенным к точке O. Таким образом, каждый вектор данной плоскости будет рассматриваться как радиус-вектор какой-нибудь точки.

59. Пусть дано правило, согласно которому с любой точкой M плоскости α сопоставлена некоторая точка M' той же плоскости (иначе говоря, точка M перемещена в некоторую точку M'). В таком случае мы скажем, что на плоскости α задано *преобразование точек*; точку M' назовем *образом* точки M.

Далее мы всегда будем предполагать, что при заданном преобразовании точка O остается на месте (совпадает со своим образом).

60. Наряду с заданным преобразованием точек мы будем рассматривать *преобразование векторов* плоскости α, при котором произвольный вектор $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$ переводится в вектор $\boldsymbol{x}'=\overline{OM'}$. Вектор $\boldsymbol{x}'$ назовем *образом* вектора $\boldsymbol{x}$. То обстоятельство, что $\boldsymbol{x}'$ является образом вектора $\boldsymbol{x}$, будем символически записывать так: $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$. Этой же записью будем выражать и самый факт, что дано определенное преобразование (если нам придется рассматривать еще другие преобразования, то мы будем писать $\boldsymbol{x}'=B\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'=C\boldsymbol{x}$ и т. п.).

61. *Преобразование* $x' = Ax$ *называется линейным, если соблюдены следующие два условия:*

1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, где x *— любой вектор плоскости* α, λ *— любое число;*

2) $A(x+y) = Ax + Ay$, *где* x *и* y *— любые два вектора плоскости* α.

Поясним эти условия наглядно. Договоримся только в дальнейшем не указывать каждый раз, что речь идет о точках и векторах плоскости α.

Остановимся прежде всего на первом условии. Как извест-

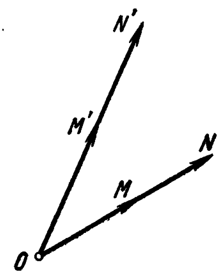

Рис. 7.

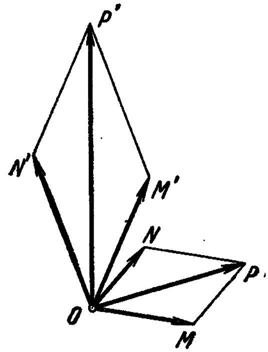

Рис. 8.

но, вектор λx коллинеарен вектору x и получается растяжением его в λ раз; первое условие означает, что образ вектора λx также коллинеарен образу x и также получается из него растяжением в λ раз (см. рис. 7, где $x = \overline{OM}$, $\lambda x = \overline{ON}$, $Ax = \overline{OM'}$, $A(\lambda x) = \overline{ON'}$; так как $A(\lambda x) = \lambda Ax$, то $\overline{ON'}$ получается из $\overline{OM'}$ таким же растяжением, каким $\overline{ON}$ получается из $\overline{OM}$).

Чтобы пояснить второе условие, положим $x = \overline{OM}$, $y = \overline{ON}$, $x + y = \overline{OP}$ (рис. 8). Пусть M', N', P' — образы точек M, N, P при данном преобразовании. Тогда $Ax = \overline{OM'}$, $Ay = \overline{ON'}$, $A(x+y) = \overline{OP'}$ и согласно второму условию $\overline{OP'} = A(x+y) = Ax + Ay = \overline{OM'} + \overline{ON'}$. Следовательно, второе условие означает, что каждый параллелограмм $OMNP$ преобразуется в четырехугольник $OM'N'P'$, который также является параллелограммом.

Пример 1. Преобразование заключается в том, что все векторы растягиваются в k раз (k — некоторое число): $Ax=kx$. Оба условия соблюдены. В самом деле, $A(\lambda x)=k(\lambda x)=\lambda(kx)=\lambda Ax$; кроме того, $A(x+y)=k(x+y)=kx+ky=Ax+Ay$. Следовательно, данное преобразование является линейным. Такое линейное преобразование называют *подобием*, а число k — *коэффициентом подобия*.

Если $x=\overline{OM}$, $Ax=\overline{OM'}$ и если точка M обегает некоторую фигуру F, то M' обегает фигуру F', которая подобна фигуре F; точка O будет центром подобия F и F' (рис. 9).

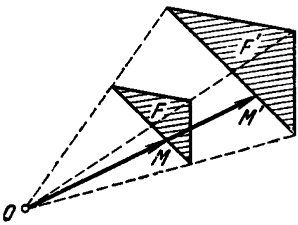

Рис. 9.

Пример 2. Преобразование заключается в том, что все векторы поворачиваются вокруг точки O в одну и ту же сторону на один и тот же угол: $x'=Ax$, где x' получен поворотом вектора x на данный угол α. Геометрически очевидно, что оба условия соблюдены и, следовательно, данное преобразование является линейным. Такое линейное преобразование называется *вращением* на угол α. Если $x=\overline{OM}$, $Ax=\overline{OM'}$ и если точка M обегает некоторую фигуру F, то M' обегает фигуру F', которая получается поворотом F вокруг O на данный угол α (рис. 10).

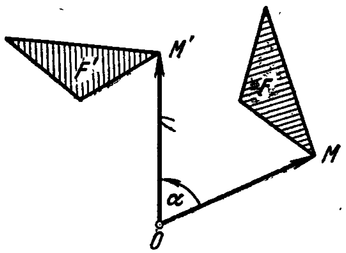

Рис. 10.

Пример 3. Пусть a — какая-нибудь прямая, проходящая через точку O. Сопоставим с произвольным вектором x симметричный ему относительно прямой a вектор $x'=Ax$. Преобразование $x'=Ax$ является линейным, поскольку оба условия линейности с очевидностью соблюдены. Такое линейное преобразование называется *зеркальным отражением* относительно прямой a. Если $x=\overline{OM}$, $Ax=\overline{OM'}$ и если точка M обегает некоторую фигуру F, то M' обегает фигуру F', которая является зеркальным образом F относительно прямой a (рис. 11).

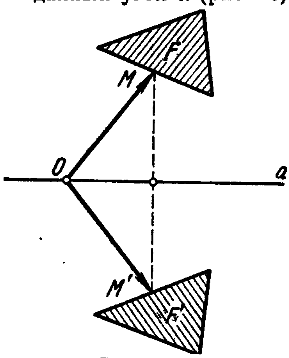

Рис. 11.

Пример 4. Пусть a — какая-нибудь прямая, проходящая через точку O. Сопоставим с произвольным вектором $x=\overline{OM}$ вектор $x'=Ax=\overline{OM'}$ при следующих условиях: если P — основание перпендикуляра, опущенного из M на a, то M' лежит на луче PM, причем отношение PM' к PM равно заранее данному положительному числу k (например, если $k = 1/2$, то M переходит в точку M', которая вдвое ближе к a, чем M; если $k = 2$, то каждая точка M удаляется от прямой на расстояние, вдвое большее первоначального). Данное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ является линейным, в чем можно убедиться проверкой условий линейности; позднее это будет установлено как следствие некоторых общих положений (см. n° 65). Рассматриваемое в этом примере линейное преобразование называется *сжатием* к прямой a; число k называется *коэффициентом сжатия* (заметим, что сжатие с коэффициентом $k > 1$ по существу является растяжением). Если точка M обегает некоторую фигуру F, то M' обегает фигуру F', которая также называется сжатием F к прямой a. На рис. 12 в качестве F изображен круг; его сжатием F' оказывается эллипс.

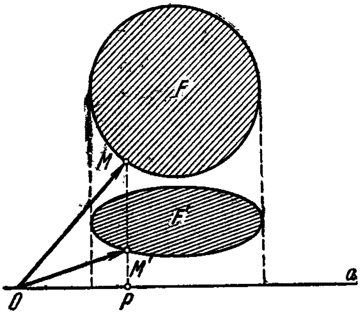

Рис. 12.

62. Наша ближайшая цель — выразить линейное преобразование в координатах. Выберем любую пару векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ с единственным условием, чтобы эти векторы были неколлинеарны. Считая $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ приложенными к точке O, рассмотрим оси Ox_1, Ox_2, по которым направлены векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (рис. 13; естественно, мы полагаем, что положительные направления осей совпадают с направлениями векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ неколлинеарны, то мы можем разложить вектор $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (см. Курс, n° 159; напомним читателю, что мы рассматриваем векторы, лежащие в одной определенной плоскости). Иначе говоря, вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде суммы

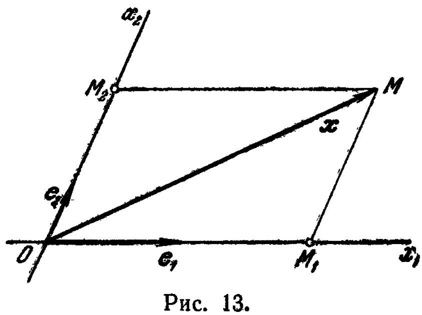

Рис. 13.

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2, \tag{1}$$

где $x_1 e_1 = \overline{OM_1}$, $x_2 e_2 = \overline{OM_2}$ — компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ по осям Ox_1, Ox_2. Число x_1 представляет собой величину отрезка OM_1 оси Ox_1, при условии, что в качестве масштабного отрезка на этой оси принят вектор e_1; аналогично x_2 — величина OM_2 в масштабе e_2. Числа x_1, x_2 называются *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* e_1, e_2. В дальнейшем, наряду с выражением (1), мы будем писать также $\boldsymbol{x} = \{x_1;\ x_2\}$.

Если $\boldsymbol{x} = \overline{OM}$, то числа x_1, x_2 называются также *координатами точки* M в системе координат с данным началом O и с данными масштабными векторами e_1, e_2. То обстоятельство, что M имеет координаты x_1, x_2, будем записывать, как обычно: $M(x_1;\ x_2)$.

Рассмотрим какое-нибудь линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Этим преобразованием пара базисных векторов e_1, e_2 переводится в некоторую пару векторов $e_1' = Ae_1$, $e_2' = Ae_2$. Допустим, что векторы e_1', e_2' даны, т. е. известны их разложения по базису e_1, e_2:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \\ e_2' &= Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Покажем, что задание формул (2) определяет линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$.

Пусть $\boldsymbol{x} = \{x_1;\ x_2\}$ — произвольный вектор, $\boldsymbol{x}' = \{x_1';\ x_2'\}$ — его образ (координаты этих векторов относятся к базису e_1, e_2). Мы имеем

$$\boldsymbol{x}' = x_1'e_1 + x_2'e_2 = A\boldsymbol{x} = A(x_1e_1 + x_2e_2).$$

Пользуясь двумя свойствами линейности преобразования, получим

$$\begin{aligned} A(x_1e_1 + x_2e_2) &= A(x_1e_1) + A(x_2e_2) = \\ &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = x_1e_1' + x_2e_2'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x}' = x_1'e_1 + x_2'e_2 = x_1e_1' + x_2e_2'.$$

Заменим в правой части последнего равенства векторы e_1', e_2' их разложениями (2):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' = x_1'e_1 + x_2'e_2 &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)e_2. \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти формулы позволяют по любому вектору $\boldsymbol{x} = \{x_1; x_2\}$ определить его образ $\boldsymbol{x}' = \{x_1'; x_2'\}$; коэффициенты этих формул даны, если даны формулы (2). Тем самым показано, что формулы (2) действительно определяют линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, которое переводит базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ в векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$. Тот же результат можно высказать так: *если мы знаем образы базисных векторов при некотором линейном преобразовании, то знаем образы всех векторов при этом преобразовании.*

Равенства (3) линейно выражают координаты вектора $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ через координаты вектора $\boldsymbol{x}$; мы будем называть их *координатным представлением* данного линейного преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ в данном базисе. Таблицу коэффициентов правых частей (3) будем обозначать буквой A и называть *матрицей* данного линейного преобразования в данном базисе

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называют *элементами* данной матрицы.

Матрицы, с которыми мы сейчас имеем дело, обладают четырьмя элементами, расположенными в двух строчках и в двух столбцах; соответственно такие матрицы называют квадратными матрицами второго порядка.

Заметим, что матрица коэффициентов формул (2) получается *транспонированием* матрицы A, т. е. перестановкой элементов a_{12} и a_{21}, симметричных относительно главной диагонали (эти элементы численно совпадать не обязаны). Результат транспонирования данной матрицы здесь и далее мы будем отмечать звездочкой. Соответственно этому матрица коэффициентов формул (2) запишется так:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

63. Пусть теперь заранее даны линейные формулы, т. е. формулы вида (3), с любыми коэффициентами a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Тем самым задано некоторое преобразование векторов на плоскости; именно, произвольному вектору $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$ сопоставлен вектор $\boldsymbol{x}'=\{x_1';\ x_2'\}$, где x_1', x_2' определены формулами (3). Обозначим это преобразование символически: $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$. Докажем, что оно линейно. Для доказательства нужно проверить два условия линейности.

1. Пусть $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'=\{x_1';\ x_2'\}$,

$$A(\lambda\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^*=\{x_1^*;\ x_2^*\}.$$

Мы имеем

$$\lambda\boldsymbol{x}=\{\lambda x_1;\ \lambda x_2\};$$

следовательно,

$$x_1^*=a_{11}(\lambda x_1)+a_{12}(\lambda x_2)=\lambda(a_{11}x_1+a_{12}x_2)=\lambda x_1',$$
$$x_2^*=a_{21}(\lambda x_1)+a_{22}(\lambda x_2)=\lambda(a_{21}x_1+a_{22}x_2)=\lambda x_2'.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x}^*=\lambda\boldsymbol{x}'$, т. е.

$$A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}.$$

Мы видим, что первое условие соблюдено.

2. Пусть $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$, $\boldsymbol{y}=\{y_1;\ y_2\}$ — любые векторы, $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}=\{x_1';\ x_2'\}$, $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}=\{y_1';\ y_2'\}$ — их образы, $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^*=\{x_1^*;\ x_2^*\}$ — образ суммы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Мы имеем

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_1+y_1;\ x_2+y_2\};$$

следовательно,

$$x_1^*=a_{11}(x_1+y_1)+a_{12}(x_2+y_2)=$$
$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+(a_{11}y_1+a_{12}y_2)=x_1'+y_1',$$
$$x_2^*=a_{21}(x_1+y_1)+a_{22}(x_2+y_2)=$$
$$=(a_{21}x_1+a_{22}x_2)+(a_{21}y_1+a_{22}y_2)=x_2'+y_2'.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$, т. е.

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}.$$

Второе условие также соблюдено. Тем самым линейность рассматриваемого преобразования доказана.

Найдем образы базисных векторов, считая, что линейное преобразование задано формулами (3). Отметим прежде всего очевидные равенства:

$$e_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2,$$
$$e_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2.$$

Они обозначают, что вектор e_1 в базисе e_1, e_2 имеет координаты 1 и 0, а координатами вектора e_2 служат 0 и 1; символически:

$$e_1 = \{1;\ 0\},\quad e_2 = \{0;\ 1\}.$$

Подставляя в правую часть равенств (3) координаты вектора e_1, получим

$$e_1' = \{a_{11};\ a_{21}\}.$$

Аналогично найдем

$$e_2' = \{a_{12};\ a_{22}\}.$$

Мы нашли коэффициенты разложений векторов e_1', e_2' по базису e_1, e_2, следовательно, можем написать и сами разложения:

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2;$$
$$e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

Матрица, составленная из коэффициентов этих разложений, имеет вид (5) и получается транспонированием матрицы (4).

64. Итак, *если дано линейное преобразование* $x' = Ax$ *и выбран базис* e_1, e_2, *то данное преобразование представляется в координатах формулами вида* (3). *Обратно, если заранее даны формулы вида* (3), *то они представляют в выбранных координатах некоторое линейное преобразование* $x' = Ax$. *Матрица* A, *составленная из коэффициентов формул* (3), *и матрица* A^*, *составленная из коэффициентов разложений векторов* Ae_1, Ae_2 *по базису* e_1, e_2, *переводятся одна в другую транспонированием.*

65. Для иллюстрации изложенного мы найдем координатные представления линейных преобразований, которые рассматривались в примерах n° 61.

Пример 1. Пусть $x' = Ax$ есть подобие с коэффициентом k, т. е. $Ax = kx$.

Возьмем базис e_1, e_2 произвольно. Имеем $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$, $\boldsymbol{x}'=\{x_1';\ x_2'\}$, $\boldsymbol{x}'=k\boldsymbol{x}$; следовательно,

$$x_1'=kx_1, \qquad x_2'=kx_2.$$

Это и есть координатное представление данного линейного преобразования. Записав полученные формулы в виде

$$x_1'=kx_1+0\cdot x_2,$$
$$x_2'=0\cdot x_1+kx_2,$$

найдем матрицу подобия:

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ есть вращение на угол α.

Возьмем специальный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ (состоящий из единичных и взаимно перпендикулярных векторов). Тогда, если $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$, то $x_1=\rho\cos\theta$, $x_2=\rho\sin\theta$, где ρ, θ — полярные координаты конца вектора $\boldsymbol{x}$. Так как вектор $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}=\{x_1';\ x_2'\}$ получается поворотом $\boldsymbol{x}$ вокруг точки O на угол α, то $x_1'=\rho\cos(\theta+\alpha)$ $x_2'=\rho\sin(\theta+\alpha)$. Отсюда

$$x_1'=\rho\cos(\theta+\alpha)=\rho\,[\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta],$$
$$x_2'=\rho\sin(\theta+\alpha)=\rho\,[\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta];$$

раскрывая скобки в правых частях этих равенств и полагая $\rho\cos\theta=x_1$, $\rho\sin\theta=x_2$, найдем

$$x_1'=x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha,$$
$$x_2'=x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha.$$

Это и есть координатное представление вращения в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Матрица вращения имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ есть зеркальное отражение относительно прямой a. Возьмем специальный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, причем вектор $\boldsymbol{i}$ направим по прямой a. Тогда, если $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$, $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}=\{x_1';\ x_2'\}$, то

$$x_1'=x_1, \qquad x_2'=-x_2.$$

Это и есть координатное представление в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ зеркального отражения относительно оси Ox_1. Матрица этого преобразования имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $x' = Ax$ есть сжатие к прямой a с коэффициентом k. Возьмем специальный базис i, j, располагая вектор i на прямой a. Тогда, если $x = \{x_1;\ x_2\}$, $x' = Ax = \{x_1';\ x_2'\}$, то

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = kx_2.$$

Это и есть координатное представление в базисе i, j сжатия к оси Ox_1 с коэффициентом k. Матрица сжатия к оси Ox_1 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в n° 61, где впервые рассматривалось сжатие, линейность этого преобразования не была доказана. Теперь ясно, что сжатие есть линейное преобразование, поскольку его координатное представление имеет линейный вид.

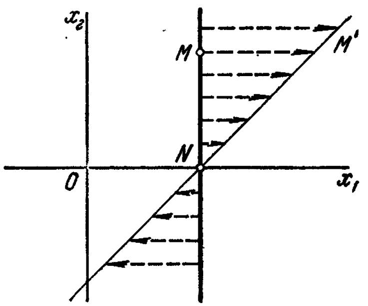

Рис. 14.

66. В заключение параграфа рассмотрим еще один пример, где линейное преобразование заранее дается его координатным представлением. Пусть

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= \phantom{x_1 + {}} x_2, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(базис i, j). Если $x = \{x_1;\ x_2\} = \overline{OM}$, $x' = \{x_1';\ x_2'\} = \overline{OM'}$, то M' получается из M перемещением параллельно оси Ox_1 на величину x_2 (точки оси Ox_1 остаются на своих местах). Такое преобразование мы назовем перекосом плоскости (см. рис. 14, где пунктирные стрелки показывают смещение точек прямой MN).

§ 13. Произведение линейных преобразований на плоскости и произведение квадратных матриц второго порядка. Сложение матриц. Умножение матрицы на число

67. Пусть даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Выберем какой-нибудь базис e_1, e_2. Тогда, если мы напишем по данной матрице A формулы (3) § 12, то тем самым будет определено некоторое линейное преобразование $A\boldsymbol{x}$; аналогично по данной матрице B в том же базисе определим линейное преобразование $B\boldsymbol{x}$.

По двум линейным преобразованиям $A\boldsymbol{x}$ и $B\boldsymbol{x}$ мы установим теперь некоторое новое линейное преобразование. Именно, возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2\}$; преобразование с матрицей B переводит его в вектор, который мы обозначим через $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}=\{y_1;\ y_2\}$; полученный вектор другим данным преобразованием будет переведен в некоторый вектор $\boldsymbol{x}'$: $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{y}=\{x'_1;\ x'_2\}$. В результате каждому вектору $\boldsymbol{x}$ сопоставлен вектор $\boldsymbol{x}'$, т. е. установлено определенное преобразование векторов. Это преобразование называется *произведением* двух данных преобразований и обозначается так: $AB\boldsymbol{x}$. Все приведенные сейчас словесные описания можно заменить одной формулой:

$$AB\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Пользуясь формулой (1), легко показать, что произведение линейных преобразований есть также линейное преобразование. Однако мы предпочтем установить тот же факт иным способом — при помощи координатных представлений данных линейных преобразований; одновременно мы найдем матрицу их произведения.

Так как $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}$, то в координатах имеем

$$\left.\begin{aligned} y_1&=b_{11}x_1+b_{12}x_2,\\ y_2&=b_{21}x_1+b_{22}x_2.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{y}$, то

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2,\\ x'_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Заменяя в последних формулах y_1, y_2, правыми частями (2), найдем

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})\,x_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})\,x_2,\\ x'_2&=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})\,x_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})\,x_2.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы получили координатное представление преобразования $\boldsymbol{x}'=AB\boldsymbol{x}$ (в данном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Поскольку формулы (4) имеют линейный вид, представляемое ими преобразование векторов является линейным (см. § 12). Тем самым доказано, что произведение двух линейных преобразований также есть линейное преобразование.

68. *Матрица произведения двух линейных преобразований называется произведением матриц этих преобразований.* Если данные преобразования суть $A\boldsymbol{x}$ и $B\boldsymbol{x}$, то их произведению $AB\boldsymbol{x}$ соответствует произведение матриц A и B, которое обозначает AB. Согласно (4)

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Рассмотрим какой-нибудь элемент произведения данных матриц, например $a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$. Этот элемент находится на пересечении первой строки и второго столбца. Заметим, что в нем участвуют элементы a_{11}, a_{12} первой строки матрицы A и элементы b_{12}, b_{22} второго столбца матрицы B, причем элементы строки умножаются на соответствующие (по порядку) элементы столбца и полученное произведение суммируется. Величина, которая составляется по указанному сейчас правилу, называется произведением строки на столбец; в частности, $a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$ есть произведение первой строки матрицы A на второй столбец матрицы B. Из (6) видно, что вообще *для того, чтобы получить элемент произведения AB, занимающий место в i-й строке и в k-м столбце* ($i=1$ *или* 2, $k=1$ *или* 2), *нужно помножить i-ю строку матрицы A на k-й столбец матрицы B.*

69. Весьма важно учесть, что произведение линейных преобразований зависит от того, в каком порядке они последовательно производятся; порядок выполнения данных преобразований отражается в записи произведения. Если мы пишем $AB\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x})$, то имеем в виду, что сначала вектор $\boldsymbol{x}$ подвергается преобразованию B, а затем его образ преобразуется при помощи A. Если $\boldsymbol{x}$ сначала подвергнуть преобразованию A, а затем полученный вектор $A\boldsymbol{x}$ преобразовать при помощи B, то получим произведение $BA\boldsymbol{x}=B(A\boldsymbol{x})$.

Вообще говоря, $ABx \neq BAx$ (хотя для некоторых преобразований A и B возможно равенство $ABx = BAx$ при любом x).

Точно так же зависит от порядка сомножителей и произведение матриц, т. е., вообще говоря, матрица AB не совпадает с матрицей BA (хотя в частных случаях совпадение AB и BA может иметь место). То обстоятельство, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей, легко понять также, если обдумать правило перемножения матриц. Дело в том, что когда мы находим элемент произведения двух матриц, то умножаем строку левого сомножителя на столбец правого; тем самым левый и правый сомножители неравноправны.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы AB и BA оказались различными.

70. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Пусть Ax — вращение на угол α, Bx — вращение на угол β (см. n° 61 и 65). Очевидно, ABx есть вращение на угол $\alpha+\beta$; в данном случае $ABx = BAx$.

Возьмем специальный базис i, j; тогда данные преобразования будут иметь соответственно матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Применяя правило умножения матриц, получим

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Этот результат можно было заранее предвидеть, так как AB есть матрица вращения на угол $\alpha+\beta$. В данном случае матрицы AB и BA совпадают.

Пример 2. Пусть Ax есть сжатие к оси Ox_2 (т. е. в направлении оси Ox_1) с коэффициентом k_1, Bx — сжатие к оси Ox_1

(т. е. в направлении оси Ox_2) с коэффициентом k_2 (см. n° 61 и 65). Матрицы этих преобразований соответственно будут:

$$A=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix};$$

умножая A на B, получим

$$AB=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида называется *диагональной*. Таким образом, диагональная матрица отвечает произведению двух сжатий к координатным осям.

71. Далее нам придется писать равенства матриц. Равенство двух матриц означает, что их элементы, занимающие одинаковые места, численно совпадают. Иначе говоря, если $A=B$, то A и B являются совершенно одинаковыми таблицами чисел.

72. Пусть даны три матрицы A, B, C. Умножая B на C, мы получим матрицу BC, на которую затем можем умножить A; в результате будем иметь матрицу $A(BC)$. Можно поступить иначе: произведение AB умножить на матрицу C; тогда получим матрицу $(AB)C$. Легко убедиться, что

$$A(BC)=(AB)C. \tag{7}$$

Для доказательства используем линейные преобразования $A\boldsymbol{x}$, $B\boldsymbol{x}$ и $C\boldsymbol{x}$, которые имеют заданные матрицы A, B и C (в каком-нибудь базисе). Рассмотрим произведение преобразований: $A(BC)\boldsymbol{x}$. Это есть преобразование, которое производится так: сначала $\boldsymbol{x}$ подвергается преобразованию C, затем его образ преобразуется с помощью B; полученный в результате вектор дополнительно подвергается преобразованию A. Символически имеем:

$$A(BC)\boldsymbol{x}=A(B(C\boldsymbol{x})).$$

Но совершенно так же производится преобразование, которое есть произведение $AB\boldsymbol{x}$ на $C\boldsymbol{x}$:

$$(AB)C\boldsymbol{x}=A(B(C\boldsymbol{x})).$$

Следовательно, преобразования $A(BC)\boldsymbol{x}$ и $(AB)C\boldsymbol{x}$ не отличаются друг от друга. Отсюда получаем равенство матриц (7).

Поскольку в произведении трех матриц A, B, C сочетание сомножителей безразлично, его обозначают так: ABC, считая $ABC = A(BC)$ или, если угодно, $ABC = (AB)C$. Нельзя, однако, нарушать заданный порядок сомножителей, так как уже произведение двух матриц зависит от того, какая из них является левым сомножителем, какая правым; например, ABC, вообще говоря, не совпадает с ACB.

Произведение любого числа матриц определяется аналогично произведению трех матриц последовательного перемножения данных сомножителей; например, $ABCD = A(B(CD))$.

73. Натуральные степени матрицы определяются так же, как степени чисел:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A,$$

например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

то

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

74. В некоторых вопросах математики и ее приложений встречается сумма и разность матриц и произведение матрицы на число. Суммой двух матриц A и B называется матрица, элементы которой получаются путем сложения соответствующих элементов данных матриц A и B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется разность $A - B$. Произведением матрицы A на число λ называется матрица, элементы которой получаются умножением элементов матрицы A на число λ:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

После всего сказанного легко понимать смысл более сложных выражений, составленных из матриц сочетанием различных действий; например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

то

$$A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{pmatrix}.$$

75. В заключение этого параграфа укажем правило сочетания действий умножения матриц и транспонирования. Напомним читателю, что действие транспонирования мы обозначаем звездочкой: если A — данная матрица, то A^* — матрица, получаемая транспонированием A (для матриц второго порядка транспонирование сводится к перемене местами правого верхнего и левого нижнего элементов).

Имеет место следующее тождество:

$$(AB)^* = B^*A^*, \tag{8}$$

т. е. *транспонированное произведение равно произведению транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке*. Для доказательства тождества (8) достаточно заметить, что строчки данной матрицы являются столбцами матрицы, получаемой ее транспонированием. Поэтому элемент произведения B^*A^*, занимающий место в i-й строчке и в k-м столбце, получается умножением i-го столбца матрицы B на k-ю строчку матрицы A. Но точно такой же элемент получается в произведении AB на пересечении k-й строчки и i-го столбца. Следовательно, AB после транспонирования совпадает с B^*A^*.

§ 14. Теорема об определителе произведения двух матриц

76. Условимся сейчас и в дальнейшем определитель данной квадратной матрицы A обозначать символом $\operatorname{Det} A$ (определитель называют также детерминантом; отсюда происходит обозначение определителя символом Det):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

77. Имеет место следующая

Теорема. *Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц;* символически:

$$\operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix};$$

тогда

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Введем обозначения: $\Delta_1=\operatorname{Det} A$, $\Delta_2=\operatorname{Det} B$, $\Delta=\operatorname{Det}(AB)$. Из (2) имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+$$

$$+b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{21}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В полученной сумме участвуют четыре определителя, составленные из элементов матрицы A. Очевидно, первый и последний из них равны нулю; определитель, занимающий второе место, есть Δ_1; на третьем месте стоит определитель, равный определителю Δ_1 с обратным знаком. Таким образом,

$$\Delta=b_{11}b_{22}\Delta_1-b_{21}b_{12}\Delta_1=(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})\,\Delta_1=\Delta_1\Delta_2.$$

Теорема доказана. Эту теорему называют также теоремой об умножении определителей.

§ 15. Геометрический смысл определителя линейного преобразования. Вырожденные преобразования

78. Пусть x, y — два произвольных вектора, заданных своими разложениями по некоторому базису e_1, e_2:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1e_1+x_2e_2, \\ y&=y_1e_1+y_2e_2; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

как и раньше, мы рассматриваем векторы, лежащие в определенной плоскости α.

Обозначим через S_0 площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, через $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, нормальный к плоскости α и направленный так же, как векторное произведение $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$; тогда

$$[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2] = S_0\boldsymbol{n}. \tag{2}$$

Заметим, что если все векторы приведены к общему началу O и если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{n}$ на плоскость α, то кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{e}_1$ к вектору $\boldsymbol{e}_2$ будет виден совершающимся против часовой стрелки.

Обозначим, далее, через S площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; тогда

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \pm S\boldsymbol{n}, \tag{3}$$

причем знак плюс будет в том случае, когда кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{x}$ к вектору $\boldsymbol{y}$ виден из конца $\boldsymbol{n}$ совершающимся против часовой стрелки, знак минус — если этот поворот будет по часовой стрелке. В первом случае мы скажем, что пара векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ (считая $\boldsymbol{x}$ первым вектором) ориентирована так же, как пара векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, во втором — что пары $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ориентированы различно. Если векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ коллинеарны, то $S = 0$ и вопрос о знаке в правой части формулы (3) отпадает.

Найдем выражение S, считая известными S_0 и коэффициенты формул (1). Мы имеем:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] &= [(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2)] = \\ &= x_1y_1[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1] + x_1y_2[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2] + x_2y_1[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1] + x_2y_2[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2] = \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2].\end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенств (2) и (3) получаем

$$\pm S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0.$$

Тем самым искомое выражение S найдено.

Условимся называть ориентированной площадью параллелограмма, построенного на паре векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, число $+S$, если пары $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ориентированы одинаково, число $-S$, если эти пары ориентированы различно (вектор $\boldsymbol{x}$ считаем первым в паре $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$); ориентированную площадь будем обозначать буквой σ. Из предыдущего равенства имеем

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0. \tag{4}$$

79. Рассмотрим произвольное линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$; пусть

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

— координатное представление этого преобразования в данном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Возьмем произвольную пару векторов $\boldsymbol{x} = \{x_1;\ x_2\}$, $\boldsymbol{y} = \{y_1;\ y_2\}$. Обозначим через σ ориентированную площадь параллелограмма, построенного на паре векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, через σ' — ориентированную площадь параллелограмма, построенного на паре их образов $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Найдем зависимость между σ и σ'. На основании формулы (4) имеем

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0. \tag{6}$$

Если $\boldsymbol{x}' = \{x_1';\ x_2'\}$, $\boldsymbol{y}' = \{y_1';\ y_2'\}$, то

$$\sigma' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} S_0. \tag{7}$$

Согласно (5)

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, & y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{aligned}$$

Отсюда и по правилу умножения матриц получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Из этого матричного равенства, применяя теорему об умножении определителей, найдем соответствующее равенство для определителей:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Умножим обе части последнего равенства на S_0 и учтем (6) и (7); мы получим искомое соотношение:

$$\sigma' = \sigma \operatorname{Det} A. \tag{8}$$

Таким образом, *при линейном преобразовании плоскости все параллелограммы деформируются так, что их ориентированные площади изменяются пропорционально; общим коэффициентом изменения площадей является определитель преобразования.* Из формулы (8) видно также следующее: если $\operatorname{Det} A > 0$, то пара векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и пара их образов ориентированы одинаково (σ и σ' имеют один и тот же знак); если $\operatorname{Det} A < 0$, то пары $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$ ориентированы различно. Иначе говоря, если $\operatorname{Det} A > 0$, то преобразование сохраняет ориентации всех пар векторов данной плоскости, если $\operatorname{Det} A < 0$ — меняет на противоположные.

80. Рассмотрим теперь линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ при условии $\operatorname{Det} A = 0$. В этом случае формула (8) дает $\sigma' = 0$ при любом значении σ. Следовательно, данное преобразование любую пару векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ переводит в пару коллинеарных векторов $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$. В частности, будут коллинеарны образы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Обозначим через a' прямую, проходящую через точку O, на которой лежат векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$. Вернемся к п° 62, где показано, что образ $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ любого вектора $\boldsymbol{x} = \{x_1;\ x_2\}$ может быть выражен в виде

$$\boldsymbol{x}' = x_1\boldsymbol{e}_1' + x_2\boldsymbol{e}_2'.$$

Отсюда заключаем: если $\operatorname{Det} A = 0$, то образы всех векторов данной плоскости располагаются на одной прямой a'; можно сказать также, что образы всех точек данной плоскости лежат на одной прямой, т. е. вся плоскость отображается в некоторую прямую. Такое линейное преобразование плоскости называется *вырожденным*; согласно изложенному *вырожденное линейное преобразование характеризуется условием* $\operatorname{Det} A = 0$. При этом же условии называется *вырожденной* и *матрица* A.

Пример. Линейное преобразование

$$x_1' = x_1 + x_2,$$
$$x_2' = x_1 + x_2$$

является вырожденным, так как образы всех точек лежат на прямой $x_1'=x_2'$. Вместе с тем имеем

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

и $\operatorname{Det} A=0$.

§ 16. Обращение линейного преобразования на плоскости

81. Рассмотрим на данной плоскости линейное преобразование $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$. Здесь $\boldsymbol{x}'$ — *образ* вектора $\boldsymbol{x}$; в таком случае $\boldsymbol{x}$ называется *прообразом* вектора $\boldsymbol{x}'$. Поставим задачу: по любому вектору $\boldsymbol{x}'$ найти его прообраз $\boldsymbol{x}$. Если будет указано правило, согласно которому по каждому вектору $\boldsymbol{x}'$ находится его прообраз $\boldsymbol{x}$, то тем самым на плоскости будет установлено некоторое новое преобразование, которое с вектором $\boldsymbol{x}'$ сопоставляет вектор $\boldsymbol{x}$. Такое преобразование называют *обратным данному* и обозначают через $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x}'$.

82. Предположим, что данное преобразование $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ является вырожденным; тогда образы всех векторов плоскости лежат на некоторой прямой a'. Если мы возьмем вектор $\boldsymbol{x}'$, не лежащий на этой прямой, то для него нет прообраза. Поэтому *для вырожденного преобразования нет обратного*.

83. Пусть теперь $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ — невырожденное линейное преобразование,

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\quad x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \tag{1}$$

— его координатное представление в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \tag{2}$$

— матрица данного преобразования. Так как преобразование $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ предполагается невырожденным, то

$$\Delta=\operatorname{Det} A\neq 0.$$

В равенствах (1) величины x_1', x_2' являются координатами образа, величины x_1, x_2 — координатами его прообраза. Чтобы получить преобразование, обратное данному, нужно выразить x_1, x_2 через x_1', x_2', т. е. решить систему (1) относительно x_1, x_2, считая x'_1, x'_2 известными. Поскольку $\Delta \neq 0$, мы получаем (см. Курс, Приложение, § 1)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & a_{12} \\ x'_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x'_1 \\ a_{21} & x'_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{a_{22}}{\Delta} x'_1 - \frac{a_{12}}{\Delta} x'_2, \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta} x'_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} x'_2. \qquad (3)$$

Мы получили координатное представление преобразования $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$, обратного данному линейному преобразованию $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ (в том же базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Так как выражения (3) имеют линейный вид, заключаем, что *обратное преобразование также является линейным.* Матрицу обратного преобразования $A^{-1}\boldsymbol{x}'$ обозначают через A^{-1} и называют *обратной матрицей* для данной матрицы A. Из (3) имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Итак, *для каждого невырожденного линейного преобразования имеется обратное преобразование, которое также является линейным*; если матрица A данного преобразования известна, то матрица A^{-1} обратного преобразования (обратная матрица) дается равенством (4).

84. К числу линейных относится следующее весьма специальное преобразование: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$; в данном случае образ каждого вектора $\boldsymbol{x}$ совпадает с самим вектором $\boldsymbol{x}$. Такое преобразование называется *тождественным.* Координатное представление тождественного преобразования в любом базисе имеет вид

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2.$$

Матрица тождественного преобразования обозначается буквой E и называется *единичной*; очевидно,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

85. Пусть $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ — любое невырожденное линейное преобразование, $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x}'$ — обратное ему. Рассмотрим произведение этих двух преобразований: имеем $A^{-1}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ (сначала преобразование A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в его образ $\boldsymbol{x}'$, затем обратное преобразование A^{-1} по вектору $\boldsymbol{x}'$ снова дает его прообраз $\boldsymbol{x}$). Следовательно, *произведение данного и обратного преобразования есть тождественное преобразование*. Отсюда

$$A^{-1}A=E, \tag{5}$$

т. е. произведение данной и обратной матрицы есть единичная матрица.

Если взять произведение данного и обратного преобразования в другом порядке, то мы также получим тождественное преобразование $AA^{-1}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'$; поэтому наряду с равенством (5) имеет место аналогичное ему равенство

$$AA^{-1}=E. \tag{6}$$

86. Заметим еще, что единичная матрица играет в теории матриц такую же роль, какую в обычной арифметике играет единица. Именно, умножение любой данной матрицы на единичную не изменяет данной матрицы:

$$AE=A, \quad EA=A; \tag{7}$$

в справедливости этих равенств легко убедиться, вычисляя AE (или EA) по правилу умножения матриц.

87. Пример. Дано координатное представление линейного преобразования:

$$x_1'=3x_1+2x_2,$$
$$x_2'=7x_1+5x_2,$$

найти обратное преобразование.

Решение. Имеем

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{pmatrix},$$

$\operatorname{Det} A=1\neq 0$. Матрица A не вырождена, следовательно, имеет обратную. Согласно (4) находим

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем координатное представление обратного преобразования:

$$x_1 = 5x_1' - 2x_2',$$
$$x_2 = -7x_1' + 3x_2'.$$

§ 17. Преобразование координат векторов при переходе к новому базису

88. Выведем формулы, по которым преобразуются координаты произвольного вектора плоскости при переходе к новому базису.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — первоначально выбранный базис, $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ — новый базис. Будем считать, что нам известны коэффициенты разложений векторов $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ по старому базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 &= l_{11}\boldsymbol{e}_1 + l_{21}\boldsymbol{e}_2, \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 &= l_{12}\boldsymbol{e}_1 + l_{22}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Матрицу коэффициентов правых частей (1) обозначим через L^*:

$$L^* = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Рассмотрим в данной плоскости произвольный вектор $\boldsymbol{x}$; координаты x_1, x_2 вектора $\boldsymbol{x}$ по старому базису определяются как коэффициенты разложения $\boldsymbol{x}$ по этому базису:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Аналогично, координаты $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ того же вектора $\boldsymbol{x}$ по новому базису даются разложением

$$\boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{x}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_2.$$

Отсюда

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = \tilde{x}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{x}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_2. \qquad (3)$$

Заменим в правой части равенства (3) векторы $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ по формулам (1); после приведения подобных членов мы получим

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = (l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2)\,\boldsymbol{e}_2.$$

Сравнивая коэффициенты, стоящие в этом равенстве слева и справа при одинаковых базисных векторах, найдем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2, \\ x_2 &= l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Это и есть искомые формулы преобразования координат векторов. Матрицу коэффициентов формул (3) мы обозначим буквой L:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Очевидно, L и L^* преобразуются друг в друга транспонированием (что и выражено обозначением *).

Учтем, что базисные векторы $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ (как и e_1, e_2) неколлинеарны; отсюда следует, что определитель матрицы L^* не равен нулю (см. n° 78). Но

$$\operatorname{Det} L^* = \operatorname{Det} L.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Det} L \neq 0.$$

Итак, если новый базис задан формулами (1), то старые координаты любого вектора выражаются через его новые координаты по формулам (4); матрицы коэффициентов формул (1) и (4) переходят друг в друга при помощи транспонирования и обе являются невырожденными.

89. Если $x = \overline{OM}$, то координаты вектора x совпадают с координатами точки M. Поэтому формулы (4) являются также формулами преобразования координат точек при переходе к новому базису (без перемены начала координат).

90. Рассмотрим частный случай преобразования координат, когда: 1) старый базис состоит из единичных и перпендикулярных друг к другу векторов i, j; 2) новый базис $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ имеет аналогичный вид. В этом случае мы изменим обозначения коэффициентов формул (1) и напишем эти формулы так:

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= l_1 i + m_1 j, \\ \tilde{j} &= l_2 i + m_2 j; \end{aligned}$$

соответственно

$$L^* = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{i}^2 = 1$, $\tilde{j}^2 = 1$, $\tilde{i}\tilde{j} = 0$, то

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{6}$$

Вследствие равенств (6) имеем по правилу умножения матриц:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

обратно, из (7) следует (6). Равенство (7) допускает краткую запись:

$$L^* L = E; \tag{8}$$

отсюда

$$L^* = L^{-1}. \tag{9}$$

Матрица L, удовлетворяющая условию (8), называется *ортогональной*. Согласно (9) можно сказать также, что *ортогональная матрица L характеризуется тем, что для нее обратная матрица совпадает с транспонированной.*

На основании изложенного в этом пункте заключаем: при переходе от базиса i, j к аналогичному базису $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ получаются формулы преобразования координат, матрица которых является ортогональной. Заметим еще, что из (8) следует числовое равенство:

$$\operatorname{Det} L^* \cdot \operatorname{Det} L = 1,$$

откуда $(\operatorname{Det} L)^2 = 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Det} L = \pm 1, \tag{10}$$

т. е. определитель ортогональной матрицы может быть равен только $+1$ или -1.

В первом случае базисы i, j и $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ ориентированы одинаково, во втором — различно (см. n° 78, формула (4), а также § 1).

91. Вернемся к общему случаю преобразования координат. Если сравнить формулы (4) с формулами (3) § 12, то легко усмотреть их полную алгебраическую аналогию. Между тем геометрическое содержание этих формул разное.

Действительно, в то время как формулы (3) § 12 выражают координаты образа $\boldsymbol{x}'$ через координаты прообраза $\boldsymbol{x}$ (в одном и том же базисе), формулы (4) выражают старые координаты вектора $\boldsymbol{x}$ через новые координаты того же самого вектора $\boldsymbol{x}$ (при изменении базиса).

Представляется целесообразным установить единые правила краткой записи такого рода формул, не считаясь с их геометрическим смыслом. С этой целью рассмотрим любые соотношения вида

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

полагая, что матрица их коэффициентов задана:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Формулы (11) можно заменить одним символическим равенством

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

понимая его правую часть как произведение квадратной матрицы B на матрицу, состоящую из одного столбца; само такое произведение (левая часть равенства (12)) также есть матрица, состоящая из одного столбца. Равенство (12) расшифровывается так: чтобы получить y_1, нужно первую строчку матрицы B умножить на столбец из пары чисел x_1, x_2; чтобы получить y_2, нужно умножить на этот столбец вторую строчку матрицы B (см. формулы (11)). Условимся теперь пару чисел x_1, x_2 обозначать одной буквой X, а пару чисел y_1, y_2 одной буквой Y. После этого равенство (12) принимает совсем компактный вид:

$$Y = BX. \tag{13}$$

Можно сказать, что пара чисел Y получается путем умножения матрицы B на пару чисел X (или пары чисел X на матрицу B). Допустим, что пара чисел Y в свою очередь умножается на матрицу A и дает новую пару чисел X':

$$X' = AY.$$

Тогда

$$X' = ABX,$$

т. е. X' можно получить непосредственно, умножая произведение матриц AB на X. Чтобы убедиться в этом, достаточно вернуться к произведению линейных преобразований; то, что мы сейчас рассматривали, совершенно не отличается от произведения линейных преобразований, заданных координатными представлениями (см. формулы (2), (3), (4) в n° 67).

Применяя введенную символику, мы запишем формулы (4) так:

$$X = L\tilde{X}, \tag{14}$$

где X — пара старых координат вектора, $\tilde{X}$ — пара его новых координат. Отсюда

$$\tilde{X} = L^{-1}X; \tag{15}$$

это значит, что пара новых координат вектора получается из пары его старых координат умножением на матрицу L^{-1}. В частном случае, когда L — ортогональная матрица, имеем

$$X = L\tilde{X}, \quad \tilde{X} = L^*X. \tag{16}$$

Полезно сравнить формулы (16) с формулами (3) и (6) § 1.

§ 18. Изменение матрицы линейного преобразования на плоскости при переходе к новому базису

92. Координатное представление данного линейного преобразования векторов и матрица этого преобразования зависят от выбора базиса. Мы установим сейчас закон изменения матрицы линейного преобразования, если выбранный базис заменяется другим.

93. Пусть дано линейное преобразование векторов на плоскости: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$; пусть

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

— координатное представление и матрица этого преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Перейдем к новому базису $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$. Тогда координаты всех векторов преобразуются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2, \\ x_2 &= l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через X пару старых координат вектора $\boldsymbol{x}$, через $\tilde{X}$ — пару новых координат этого же вектора: $X = \{x_1;\ x_2\}$, $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1;\ \tilde{x}_2\}$. Аналогично, через X' и $\tilde{X}'$ обозначим пару старых и пару новых координат вектора $\boldsymbol{x}'$ ($X' = \{x'_1;\ x'_2\}$, $\tilde{X}' = \{\tilde{x}'_1;\ \tilde{x}'_2\}$).

Считая, что формулы (2) относятся к координатам вектора $\boldsymbol{x}$, запишем их кратко:

$$X = L\tilde{X}.$$

Но по тем же формулам изменяются координаты вектора $\boldsymbol{x}'$, поэтому

$$X' = L\tilde{X}'.$$

Координатное представление (1) данного преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ может быть записано в аналогичном виде

$$X' = AX.$$

Из последних трех равенств получаем

$$L\tilde{X}' = AL\tilde{X}.$$

Здесь слева и справа записана некоторая пара чисел. Умножим ее на матрицу L^{-1}:

$$L^{-1}L\tilde{X}' = L^{-1}AL\tilde{X}. \tag{3}$$

Так как $L^{-1}L = E$ (единичная матрица), то умножение на $L^{-1}L$ не изменяет пары чисел. Следовательно, равенство (3) может быть переписано так:

$$\tilde{X}' = L^{-1}AL\tilde{X}. \tag{4}$$

Это равенство выражает пару новых координат вектора $\boldsymbol{x}'$ через пару новых координат вектора $\boldsymbol{x}$; значит, равенство (4) есть координатное представление данного линейного преобразования $x' = Ax$ в новом базисе. Если мы обозначим матрицу данного линейного преобразования в новом базисе через $\tilde{A}$, то из (4) получим

$$\tilde{A} = L^{-1}AL. \tag{5}$$

Итак, *если мы переходим к новому базису*

$$\tilde{e}_1 = l_{11}e_1 + l_{21}e_2,$$
$$\tilde{e}_2 = l_{12}e_1 + l_{22}e_2,$$

то матрица A любого линейного преобразования векторов плоскости заменяется матрицей $\tilde{A}$, которая выражается равенством (5); *в этом равенстве*

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Укажем одно важное следствие формулы (5). Именно, по теореме об определителе произведения матриц имеем

$$\operatorname{Det} \tilde{A} = \operatorname{Det} L^{-1} \cdot \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} L =$$
$$= \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} L^{-1} \cdot \operatorname{Det} L.$$

Но $L^{-1}L = E$; следовательно,

$$\operatorname{Det} L^{-1} \operatorname{Det} L = \operatorname{Det} E = 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Det} \tilde{A} = \operatorname{Det} A,$$

т. е. *определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.* По существу, это обстоятельство уже было установлено в n° 79, где показано, что определитель преобразования есть коэффициент изменения площадей. Поскольку площадь фигуры не зависит от выбора координат, то и рассматриваемый определитель не может зависеть от этого выбора.

Пример. Дано координатное представление некоторого линейного преобразования в базисе e_1, e_2:

$$x_1' = x_1 + 2x_2,$$
$$x_2' = 3x_1 + 4x_2.$$

Найти координатное представление того же преобразования в базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, где

$$\tilde{e}_1 = 11e_1 + 7e_2,$$
$$\tilde{e}_2 = 3e_1 + 2e_2.$$

Решение. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{Det} L = 1 \neq 0$, то существует

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

По формуле (5)

$$\tilde{A} = L^{-1}AL = \begin{pmatrix} -133 & -38 \\ 496 & 138 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, данное линейное преобразование в новом базисе имеет координатное представление:

$$\tilde{x}'_1 = -133\tilde{x}_1 - 38\tilde{x}_2,$$
$$\tilde{x}'_2 = 496\tilde{x}_1 + 138\tilde{x}_2.$$

§ 19. Матричная запись системы двух линейных уравнений

94. Изложенные в предыдущих параграфах матричные операции удобно применять к решению систем линейных уравнений.

Пусть дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= h_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно n° 91 мы можем систему (1) записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Обозначим пару неизвестных одной буквой X, а пару чисел h_1, h_2 — одной буквой H $(X = \{x_1;\ x_2\},\ H = \{h_1;\ h_2\})$.

Тогда система (1) запишется в компактном виде:

$$AX = H. \tag{3}$$

Соотношение (3) называется *матричной записью данной системы.*

Если $\operatorname{Det} A \neq 0$, то матрица A имеет обратную; в этом случае

$$X = A^{-1}H. \tag{4}$$

Формула (4) выражает пару неизвестных через данные величины. Эту формулу называют *матричной записью решения.* Чтобы вычислить решение по формуле (4), нужно: 1) составить матрицу A^{-1} (см. n° 83), 2) умножить квадратную матрицу A^{-1} на матрицу H, состоящую из одного столбца (см. n° 91).

95. Матричная запись решения имеет практическое значение в тех задачах, где приходится многократно решать систему при одних и тех же коэффициентах в левых частях, но с различными заданиями правых частей. В таких задачах достаточно один раз затратить труд на составление обратной матрицы, чтобы затем уже по готовым формулам находить неизвестные в зависимости от правых частей системы. Особое значение этот метод получает в задачах, сводящихся к линейным системам с большим числом неизвестных.

96. Пример. Дана система

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= h_1, \\ 3x_1 + 2x_2 &= h_2. \end{aligned}$$

Найти выражение неизвестных x_1, x_2 через h_1, h_2.

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{Det} A = 1 \neq 0$. Матрица A является невырожденной, следовательно, имеет обратную. Согласно n° 83 находим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= 2h_1 - 3h_2, \\ x_2 &= -3h_1 + 5h_2. \end{aligned}$$

§ 20. Линейное преобразование в пространстве и квадратные матрицы третьего порядка

В этом параграфе кратко излагаются основные сведения о линейных преобразованиях в пространстве. Пункты этого параграфа даются с подзаголовками. По ним будет легко установить аналогичные вопросы о линейных преобразованиях на плоскости, которые излагались нами с достаточной подробностью.

97. Понятие линейного преобразования в пространстве. Координатное представление. Отметим в пространстве какую-нибудь точку O; всякий вектор $\boldsymbol{x}$ будем считать приложенным к точке O и рассматривать как радиус-вектор некоторой точки M: $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$. Говорят, что в пространстве задано *преобразование точек*, если указано правило, согласно которому с любой точкой M сопоставлена некоторая точка M' (иначе говоря, M перемещена в M'). Далее всегда предполагается, что точка O остается на месте. Одновременно с преобразованием точек устанавливается *преобразование векторов*, при котором произвольный вектор $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$ переводится в вектор $\boldsymbol{x}'=\overline{OM'}$. Вектор $\boldsymbol{x}'$ мы назовем *образом* вектора $\boldsymbol{x}$ и будем писать: $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$.

Преобразование $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ *называется линейным, если* 1) $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A\boldsymbol{x}$, *где* $\boldsymbol{x}$ — *любой вектор пространства,* λ — *любое число;* 2) $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}$, *где* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — *любые два вектора.*

Выберем в пространстве базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (в качестве $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ разрешается взять любые векторы, лишь бы они были некомпланарны). Тогда каждый вектор $\boldsymbol{x}$ можно разложить по выбранному базису:

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3.$$

Коэффициенты этого разложения назовем *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ и будем писать: $\boldsymbol{x}=\{x_1;\ x_2;\ x_3\}$. Эти же коэффициенты будем называть *координатами точки* M, если $\boldsymbol{x}=\overline{OM}$ (тем самым точка O принята в качестве начала координат).

Рассмотрим какое-нибудь линейное преобразование $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$. Предположим, что нам даны образы базисных векторов

$e_1' = Ae_1$, $e_2' = Ae_2$, $e_3' = Ae_3$, т. е. известны их разложения по базису e_1, e_2, e_3:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, \\ e_2' &= Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, \\ e_3' &= Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Легко показать, что задание формул (1) определяет линейное преобразование $x' = Ax$. Пусть $x = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ — произвольный вектор, $x' = \{x_1';\ x_2';\ x_3'\}$ — его образ (координаты этих векторов относятся к базису e_1, e_2, e_3). Мы имеем

$$\begin{aligned} x' &= x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3 = Ax = A(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \\ &= A(x_1e_1) + A(x_2e_2) + A(x_3e_3) = \\ &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + x_3Ae_3 = \\ &= x_1e_1' + x_2e_2' + x_3e_3'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x' = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3 = x_1e_1' + x_2e_2' + x_3e_3'. \qquad (2)$$

Заменим в правой части равенства (2) векторы e_1', e_2', e_3' их разложениями (1) и сгруппируем подобные члены; мы получим:

$$\begin{aligned} x' &= x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3 = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,e_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,e_2 + \\ &+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,e_3. \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, найдем

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Формулы (3) позволяют по любому вектору $x = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ определить его образ $x' = \{x_1';\ x_2';\ x_3'\}$; коэффициенты этих формул даны, если даны формулы (1). Тем самым показано, что формулы (1) действительно определяют линейное преобразование $x' = Ax$, которое переводит базисные векторы

e_1, e_2, e_3 в векторы e_1', e_2', e_3'. Иначе говоря, *если мы знаем образы базисных векторов при некотором линейном преобразовании, то знаем образы всех векторов.* Равенства (3) линейно выражают координаты вектора $x' = Ax$ через координаты вектора x; мы будем их называть *координатным представлением* данного линейного преобразования $x' = Ax$ в данном базисе.

Таблицу коэффициентов правых частей (3) обозначим буквой A и назовем *матрицей* данного преобразования в данном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

числа a_{11}, ..., a_{33} называют *элементами* данной матрицы. Матрицы вида (4) имеют три строчки и три столбца; такие матрицы называются квадратными матрицами третьего порядка.

Матрица коэффициентов формул (1) получается *транспонированием* матрицы A, т. е. перестановкой элементов, симметричных относительно главной диагонали. Результат транспонирования данной матрицы мы будем обозначать звездочкой. Соответственно этому матрица коэффициентов формул (1) запишется так:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Укажем еще, что *любые формулы вида* (3) (т. е. с любыми коэффициентами) *дают координатное представление некоторого линейного преобразования.* Это утверждение доказывается в полной аналогии с тем, как было доказано соответствующее утверждение о линейных преобразованиях на плоскости (см. п° 63), и останавливаться на его доказательстве мы не будем.

Пример. Пусть α — какая-нибудь плоскость, проходящая через точку O. Сопоставим с произвольным вектором $x = \overline{OM}$ вектор $x' = Ax = \overline{OM'}$ при следующих условиях: если P — основание перпендикуляра, опущенного из M на α, то M' лежит на луче PM, причем отношение PM' к PM равно заранее данному положительному числу k. Доказать, что рассматриваемое преобразование $x' = Ax$ является линейным.

Решение. Возьмем базис, состоящий из единичных и попарно перпендикулярных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ расположим в плоскости α. Тогда, если $\boldsymbol{x}=\{x_1; x_2; x_3\}$, $\boldsymbol{x}'=\{x_1'; x_2'; x_3'\}$, то

$$x_1'=x_1, \quad x_2'=x_2, \quad x_3'=kx_3. \tag{6}$$

Полученные формулы имеют вид (3) и, следовательно, являются координатным представлением линейного преобразования. В данном случае

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Линейное преобразование (6) называется *сжатием* к плоскости α (содержащей первые две координатные оси); число k называется *коэффициентом сжатия*, матрица (7) называется *матрицей сжатия* (к той же плоскости).

98. Произведение линейных преобразований в пространстве. Произведение квадратных матриц третьего порядка. Пусть даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Возьмем какой-нибудь базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и рассмотрим линейные преобразования $A\boldsymbol{x}$ и $B\boldsymbol{x}$, которые в этом базисе имеют данные матрицы A и B.

Пусть $\boldsymbol{x}=\{x_1; x_2; x_3\}$ — произвольный вектор. Преобразование с матрицей B переводит его в некоторый вектор $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}=\{y_1; y_2; y_3\}$; полученный вектор другим данным преобразованием будет переведен в вектор $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{y}=$ $=\{x_1'; x_2'; x_3'\}$. В результате с каждым вектором $\boldsymbol{x}$ сопоставлен вектор $\boldsymbol{x}'$, т. е. установлено определенное преобразование векторов. Это преобразование обозначается $AB\boldsymbol{x}$ и называется *произведением* двух данных преобразований:

$$AB\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x}).$$

Проводя выкладки аналогично тому, как делалось в § 3, можно показать, что произведение двух линейных преобразований есть также линейное преобразование, и найти его матрицу.

Матрица преобразования ABx называется *произведением матриц* A, B и обозначается символом AB. Произведение AB может быть непосредственно найдено по данным матрицам A и B, согласно следующему правилу:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Чтобы пояснить правило умножения матриц, выраженное равенством (8), рассмотрим элемент произведения, занимающий место в i-й строке и в k-м столбце; этот элемент согласно (8) записывается так: $a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}$. Здесь участвуют элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, составляющие i-ю строку матрицы A, и элементы b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, составляющие k-й столбец матрицы B. Сама *сумма* $a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}$ *называется произведением i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы B*. Таким образом, *чтобы получить элемент произведения AB, занимающий место в i-й строке и в k-м столбце* ($i=1, 2, 3$, $k=1, 2, 3$), *нужно помножить i-ю строку матрицы A на k-й столбец матрицы B.*

Свойства произведений матриц третьего порядка аналогичны свойствам произведений матриц второго порядка; мы не будем задерживаться на их изложении. Точно так же, в полной аналогии с матрицами второго порядка, определяется умножение матрицы третьего порядка на число и сумма таких матриц.

Пример. Пусть Ax есть сжатие к плоскости Ox_2x_3 с коэффициентом k_1, Bx—сжатие к плоскости Ox_1x_3 с коэффициентом k_2, Cx—сжатие к плоскости Ox_1x_2 с коэффициентом k_3 (см. пример в n° 97). Матрицы этих преобразований соответственно будут:

$$A=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Перемножая A, B, C, получим

$$ABC=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида называется *диагональной*. Таким образом, *диагональная матрица третьего порядка отвечает произведению трех сжатий к координатным плоскостям.*

99. Теорема об определителе произведения двух матриц. Для матриц третьего порядка, как и для матриц второго порядка, справедливо равенство:

$$\operatorname{Det} AB = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B. \tag{9}$$

Более того, это равенство естественным образом обобщается на матрицы любого порядка. Доказательство равенства (9) можно провести в общих чертах так же, как делалось в § 14, но, конечно, с осложнением выкладок.

100. Геометрический смысл определителя линейного преобразования в пространстве. Вырожденные преобразования в пространстве. Прежде всего мы найдем выражение смешанного произведения трех векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, заданных своими разложениями по произвольному базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{z} &= z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Перемножим сначала $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ векторно:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2)[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3] + \\ + (x_3y_1 - x_1y_3)[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1] + (x_1y_2 - x_2y_1)[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2].\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь умножим скалярно обе части равенства (11) на обе части последнего равенства (10); мы получим

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) = \{(x_2y_3 - x_3y_2)\,z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,z_2 + \\ + (x_1y_2 - x_2y_1)\,z_3\}\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$; $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ — смешанное произведение базисных векторов. Предположим для определенности, что тройка векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — правая и что векторное произведение ориентировано по правилу правой руки. Тогда смешанное произведение $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ есть положительная величина, равная объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$; обозначим этот объем через V_0. Имеем: $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = V_0$.

Смешанное произведение $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ правая, и со знаком минус, если эта тройка левая. Условимся смешанное произведение $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}$ называть ориентированным объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, и обозначать буквой τ; имеем: $\boldsymbol{xyz}=\tau$. Заметим, наконец, что в фигурных скобках равенства (12) записан в развернутом виде определитель, составленный из координат данных векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Учтя все сказанное, получаем формулу:

$$\tau=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} V_0. \tag{13}$$

Рассмотрим какое-нибудь линейное преобразование пространства $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$. Пусть $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{z}'$ — образы векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ в данном преобразовании, τ' — ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{z}'$. Тогда аналогично (13) будет иметь место равенство:

$$\tau'=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix} V_0. \tag{14}$$

Здесь определитель составлен по координатам векторов $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{z}'$. Далее, если матрица преобразования обозначена стандартным образом (как в равенстве (4)), то

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\
x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\
x_3' &= a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\\
y_1' &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3,\\
y_2' &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3,\\
y_3' &= a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3,\\
z_1' &= a_{11}z_1+a_{12}z_2+a_{13}z_3,\\
z_2' &= a_{21}z_1+a_{22}z_2+a_{23}z_3,\\
z_3' &= a_{31}z_1+a_{32}z_2+a_{33}z_3.
\end{aligned}$$

Согласно правилу умножения матриц мы можем все эти девять равенств записать в виде одного матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по теореме об определителе произведения матриц находим:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\, A \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Умножим обе части этого равенства на V_0; тогда в силу (13) и (14) получится соотношение, которое и было нашей целью:

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{Det}\, A. \qquad (15)$$

На основании соотношения (15) заключаем: *при линейном преобразовании пространства все параллелепипеды деформируются так, что их ориентированные объемы изменяются пропорционально; общим коэффициентом изменения объемов является определитель преобразования.* Из формулы (15) видно также следующее: если $\mathrm{Det}\, A > 0$, то тройка векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и тройка их образов ориентированы одинаково ($\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$ имеют один и тот же знак); если $\mathrm{Det}\, A < 0$, то тройки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}'$, $\boldsymbol{z}'$ ориентированы различно.

Рассмотрим теперь линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ при условии $\mathrm{Det}\, A = 0$. В этом случае формула (15) дает $\boldsymbol{\tau}' = 0$ при любом значении $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно, данное преобразование любую тройку векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ переводит в три компланарных вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. В частности, будут компланарны образы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Обозначим через α' плоскость, проходящую через точку O, на которой лежат векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$. Вернемся к формуле (2), согласно которой образ $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ любого вектора $\boldsymbol{x} = \{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ может быть выражен в виде

$$\boldsymbol{x}' = x_1\boldsymbol{e}_1' + x_2\boldsymbol{e}_2' + x_3\boldsymbol{e}_3'.$$

Отсюда заключаем: если $\mathrm{Det}\, A = 0$, то образы всех векторов пространства располагаются на одной плоскости α'. Можно сказать также, что образы всех точек пространства лежат на одной плоскости, т. е. все пространство отображается в некоторую плоскость. Такое линейное преобразование пространства называется *вырожденным*. Согласно изложенному, *вырожденное линейное преобразование характеризуется условием*: $\mathrm{Det}\, A = 0$. При этом же условии называется *вырожденной и матрица* A.

Пример. Линейное преобразование

$$x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$
$$x_2' = 3x_1 + 2x_2 + x_3,$$
$$x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3$$

является вырожденным, так как образы всех точек пространства лежат на плоскости $x_1' + x_2' - x_3' = 0$. Вместе с тем

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

101. Обращение линейного преобразования в пространстве. Рассмотрим в пространстве линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$; здесь $\boldsymbol{x}'$ — *образ* вектора $\boldsymbol{x}$, вектор $\boldsymbol{x}$ — *прообраз* вектора $\boldsymbol{x}'$. Преобразование, которое с произвольным вектором $\boldsymbol{x}'$ сопоставляет его прообраз $\boldsymbol{x}$ в данном преобразовании, называется обратным данному и обозначается $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$. Займемся задачей: по данному линейному преобразованию найти обратное ему.

Предположим, что данное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ является вырожденным; тогда образы всех векторов пространства лежат на одной плоскости α'. Если мы возьмем вектор $\boldsymbol{x}'$, не лежащий на этой плоскости, то для него нет прообраза. Поэтому *для вырожденного преобразования нет обратного*.

Пусть теперь $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ — невырожденное линейное преобразование,

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

— его координатное представление в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица данного преобразования. Так как преобразование не вырождено, то $\Delta = \operatorname{Det} A \neq 0$. Чтобы получить преобразование, обратное данному, нужно выразить координаты прообраза $\{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ через координаты образа $\{x_1';\ x_2';\ x_3'\}$, т. е. решить систему (16) относительно x_1, x_2, x_3, считая x_1', x_2', x_3' известными. Поскольку $\Delta \neq 0$, мы находим (см. Курс, Приложение, § 5)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} & a_{13} \\ x_2' & a_{22} & a_{23} \\ x_3' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1' & a_{13} \\ a_{21} & x_2' & a_{23} \\ a_{31} & x_3' & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1' \\ a_{21} & a_{22} & x_2' \\ a_{31} & a_{32} & x_3' \end{vmatrix}}{\Delta}. \quad (17)$$

Будем обозначать через A_{ik} алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя матрицы A. Рассмотрим первый из написанных выше определителей. Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, получим

$$\begin{vmatrix} x_1' & a_{12} & a_{13} \\ x_2' & a_{22} & a_{23} \\ x_3' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + A_{31}x_3'. \quad (18)$$

В самом деле, x_1', x_2', x_3' занимают места элементов a_{11}, a_{21}, a_{31} определителя матрицы A, поэтому в разложении определителя (18) по элементам первого столбца числа x_1', x_2', x_3' должны помножаться на алгебраические дополнения A_{11}, A_{21}, A_{31}. Производя аналогичные разложения двух других определителей в формулах (17), приведем эти формулы к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}}{\Delta} x_1' + \frac{A_{21}}{\Delta} x_2' + \frac{A_{31}}{\Delta} x_3', \\ x_2 &= \frac{A_{12}}{\Delta} x_1' + \frac{A_{22}}{\Delta} x_2' + \frac{A_{32}}{\Delta} x_3', \\ x_3 &= \frac{A_{13}}{\Delta} x_1' + \frac{A_{23}}{\Delta} x_2' + \frac{A_{33}}{\Delta} x_3'. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Мы получили координатное представление преобразования $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$, обратного данному линейному преобразованию $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ (в том же базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). Так как выражения (19) имеют линейный вид, заключаем, что *обратное преобразование также является линейным*. Матрицу преобразования $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$ обозначают через A^{-1} и называют *обратной* *матрицей* для данной матрицы A. Из (19) находим:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В пространстве, как и на плоскости, рассматривается *тождественное преобразование*, которое в любом базисе дается формулами: $x'_1=x_1$, $x'_2=x_2$, $x'_3=x_3$. Матрица тождественного преобразования обозначается буквой E и называется *единичной:*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеют место равенства:

$$A^{-1}A=E, \quad AA^{-1}=E. \tag{21}$$

Кроме того, для любой матрицы A

$$AE=A, \quad EA=A. \tag{22}$$

Чтобы доказать равенства (21), (22), достаточно повторить соображения, приведенные в n° 85 и 86.

102. Преобразование координат векторов пространства при переходе к новому базису. Пусть базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ заменяется новым базисом:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 &= l_{11}\boldsymbol{e}_1+l_{21}\boldsymbol{e}_2+l_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 &= l_{12}\boldsymbol{e}_1+l_{22}\boldsymbol{e}_2+l_{32}\boldsymbol{e}_3, \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 &= l_{13}\boldsymbol{e}_1+l_{23}\boldsymbol{e}_2+l_{33}\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Матрицу коэффициентов этих разложений мы будем считать известной и обозначим через L^*. Так как векторы, составляющие базис (как старый, так и новый), не компланарны, то $\operatorname{Det} L^* \neq 0$. (Это следует из того, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$, отличен от нуля, см. формулу (13) в n° 100.)

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ с координатами x_1, x_2, x_3 в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$; этот же вектор $\boldsymbol{x}$ в новом базисе $\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3$ будет иметь другие координаты $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Связь между старыми и новыми координатами вектора $\boldsymbol{x}$ дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}\tilde{x}_1 + l_{12}\tilde{x}_2 + l_{13}\tilde{x}_3, \\ x_2 &= l_{21}\tilde{x}_1 + l_{22}\tilde{x}_2 + l_{23}\tilde{x}_3, \\ x_3 &= l_{31}\tilde{x}_1 + l_{32}\tilde{x}_2 + l_{33}\tilde{x}_3. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Формулы (24) аналогичны формулам (4) n° 88 и доказываются вполне аналогичным образом. Матрицу коэффициентов формул (24) мы обозначим через L (L и L^* переводятся друг в друга транспонированием). Будем употреблять умножение квадратной матрицы третьего порядка на матрицу из одного столбца (составленного тремя числами); эта операция определяется в полной аналогии с тем, что делалось в n° 91. Тогда три равенства (24) заменятся одним матричным равенством:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Условимся тройку чисел $\{x_1, x_2, x_3\}$ обозначать одной буквой X, а тройку чисел $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$ — одной буквой $\tilde{X}$. После этого равенства (24) получат следующий вид:

$$X = L\tilde{X}. \qquad (25)$$

Обратные формулы (выражающие новые координаты вектора через его старые координаты) сведутся к матричному равенству

$$\tilde{X} = L^{-1}X. \qquad (26)$$

Матрица L^{-1} существует, так как $\operatorname{Det} L = \operatorname{Det} L^* \neq 0$.

103. Преобразование прямоугольных координат. Ортогональная матрица третьего порядка. Рассмотрим частный случай преобразования координат, когда: 1) старый базис состоит из единичных и перпендикулярных друг к другу векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; 2) новый базис $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}$ имеет аналогичный вид. В этом случае мы изменим обозначения коэффициентов формул (23) и напишем эти формулы так:

$$\begin{aligned}\tilde{i} &= l_1 i + m_1 j + n_1 k,\\ \tilde{j} &= l_2 i + m_2 j + n_2 k,\\ \tilde{k} &= l_3 i + m_3 j + n_3 k;\end{aligned}$$

соответственно

$$L^* = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{i}^2 = 1$, $\tilde{j}^2 = 1$, $\tilde{k}^2 = 1$, $\tilde{i}\,\tilde{j} = 0$, $\tilde{i}\,\tilde{k} = 0$, $\tilde{j}\,\tilde{k} = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,\\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0,\\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Вследствие этих равенств имеем

$$L^* L = E; \tag{28}$$

обратно, из формулы (28) следует (27). Матрица L, удовлетворяющая условию (28), называется *ортогональной*. Из (28) следует также, что

$$L^* = L^{-1}, \tag{29}$$

т. е. *для ортогональной матрицы обратная матрица совпадает с транспонированной*. На основании изложенного заключаем: при переходе от базиса i, j, k к аналогичному базису $\tilde{i}$, $\tilde{j}$, $\tilde{k}$ получаются формулы преобразования координат с ортогональной матрицей. В этом случае формулы прямого и обратного преобразования координат имеют матричную запись:

$$X = L\tilde{X}, \quad \tilde{X} = L^* X \tag{30}$$

(см. формулы (25), (26) п° 102 и формулу (29)). Формулы (30) полезно сравнить с формулами (7) и (9) § 6.

Заметим еще, что вследствие (28)

$$\mathrm{Det}\, L^* \cdot \mathrm{Det}\, L = 1;$$

но $\operatorname{Det} L^* = \operatorname{Det} L$. Следовательно, $(\operatorname{Det} L)^2 = 1$ и

$$\operatorname{Det} L = \pm 1.$$

Таким образом, определитель ортогональной матрицы может быть равен только $+1$ или -1. В первом случае базисы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и $\tilde{\boldsymbol{i}}, \tilde{\boldsymbol{j}}, \tilde{\boldsymbol{k}}$ ориентированы одинаково, во втором — различно (см. формулу (13) n° 100, а также § 6).

104. Изменение матрицы линейного преобразования в пространстве при переходе к новому базису. Пусть в пространстве дано линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Если выбран некоторый базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то данное линейное преобразование получит определенное координатное представление с определенной матрицей A. Предположим, что базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ заменяется новым базисом $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$ по формулам (23) n° 102. Тогда то же самое линейное преобразование в новом базисе будет иметь другое координатное представление с другой матрицей $\tilde{A}$. При этом

$$\tilde{A} = L^{-1}AL. \tag{31}$$

Вывод формулы (31) производится точно так же, как вывод аналогичной формулы для линейных преобразований на плоскости (см. § 18), и воспроизводить его мы не будем.

Отметим, что из матричной формулы (31) следует числовое равенство:

$$\operatorname{Det} \tilde{A} = \operatorname{Det} A,$$

т. е. определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса. По существу, этот факт уже установлен в n° 100, где показано, что определитель линейного преобразования выражает отношение объемов; поскольку объемы тел не зависят от выбора координат, то и рассматриваемый определитель не может зависеть от этого выбора.

Пример. Дано координатное представление линейного преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3, \\ x_3' &= \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Найти координатное представление этого преобразования в базисе

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= e_1 + 2e_2 + e_3,\\ \tilde{e}_2 &= 2e_1 + e_2 + 3e_3,\\ \tilde{e}_3 &= e_1 + e_2 + e_3.\end{aligned}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (20) к матрице L, найдем

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix};$$

далее,

$$L^{-1}AL = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, в новом базисе данное линейное преобразование представляется формулами

$$\begin{aligned}\tilde{x}'_1 &= -\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2,\\ \tilde{x}'_2 &= \tilde{x}_2,\\ \tilde{x}'_3 &= 4\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3.\end{aligned}$$

105. Матричная запись системы трех линейных уравнений. В заключение параграфа дадим приложение матричных методов к системам трех линейных уравнений с тремя неизвестными. То, что мы сейчас будем делать, аналогично изложенному в § 19.

Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= h_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= h_2,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= h_3.\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Составим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и заменим уравнения (32) одним матричным равенством:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим тройку неизвестных одной буквой X, а тройку чисел h_1, h_2, h_3 — буквой H. Тогда предыдущее соотношение примет такой вид:

$$AX=H. \tag{33}$$

Равенство (33) называется *матричной записью данной системы.*

Если $\operatorname{Det} A \neq 0$, то матрица A имеет обратную; в этом случае

$$X=A^{-1}H. \tag{34}$$

Формула (34) выражает тройку неизвестных через данные величины. Эту формулу называют *матричной записью решения.*

Пример. Дана система

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=h_1, \\ 2x_1+x_2+x_3&=h_2, \\ x_1+3x_2+x_3&=h_3. \end{aligned}$$

Выразить неизвестные x_1, x_2, x_3 через h_1, h_2, h_3.

Решение. Имеем

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Det} A=1 \neq 0$. Матрица A является невырожденной, следовательно, имеет обратную. Согласно n° 101 находим:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= -2h_1 + h_2 + h_3, \\ x_2 &= -h_1 \quad\quad + h_3, \\ x_3 &= 5h_1 - h_2 - 3h_3. \end{aligned}$$

§ 21. Собственные векторы линейного преобразования

106. Пусть дано линейное преобразование $x' = Ax$. Вектор x (не равный нулю) называется *собственным вектором* данного линейного преобразования, если для этого вектора

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

где λ — некоторое число; число λ называется *собственным числом* вектора x. Согласно высказанному определению собственный вектор x характеризуется тем, что при данном преобразовании переходит в коллинеарный ему вектор x'; собственное число есть отношение вектора x' к вектору x (т. е. коэффициент в равенстве $x' = \lambda x$).

Отметим следующее важное обстоятельство: *если x — собственный вектор данного преобразования, то всякий не равный нулю коллинеарный ему вектор будет также собственным вектором данного преобразования с тем же собственным числом.* В самом деле, пусть x^* коллинеарен x; тогда, поскольку $x \neq 0$, найдется число α такое, что $x^* = \alpha x$. На основании известного свойства линейных преобразований имеем $Ax^* = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda x^*$. Итак, $Ax^* = \lambda x^*$; а это и значит, что x^* есть собственный вектор с собственным числом λ.

107. Для иллюстрации понятия собственного вектора и собственного числа рассмотрим линейные преобразования на плоскости, которые приводились в примерах n° 60 § 12 (здесь они даются в той же последовательности).

Пример 1. Ax — подобие с коэффициентом k. Для такого преобразования каждый вектор является собственным вектором; все векторы имеют одно и то же собственное число, равное коэффициенту подобия.

Пример 2. Ax — вращение на угол α. Если $0 < \alpha < \pi$, то Ax не имеет собственных векторов (все векторы поворачиваются так, что ни один образ не лежит на оси своего прообраза). Если $\alpha = 0$, то Ax является тождественным преобразованием; в этом случае каждый вектор является собственным вектором с собственным числом $= 1$. Если $\alpha = \pi$, то $x' = Ax = -x$; для такого преобразования каждый вектор является собственным вектором с собственным числом $= -1$.

Пример 3. Ax — зеркальное отражение относительно прямой a. В этом случае собственными будут: 1) векторы, лежащие на прямой a; для них собственное число $= 1$; 2) векторы, перпендикулярные к прямой a; собственное число этих векторов $= -1$.

Пример 4. Ax — сжатие к прямой a с коэффициентом k. Собственными векторами являются: 1) векторы, лежащие на прямой a (с собственным числом $= 1$); 2) векторы, перпендикулярные к прямой a (с собственным числом $= k$).

108. Пусть $x' = Ax$ — линейное преобразование на плоскости. Предположим, что имеются два собственных вектора этого преобразования, которые не коллинеарны друг другу. Обозначим их через e_1, e_2; обозначим через λ_1, λ_2 собственные числа этих векторов. Так как e_1, e_2 не коллинеарны, мы можем принять их в качестве базиса. Найдем координатное представление данного линейного преобразования в базисе e_1, e_2. Пусть e_1', e_2' — образы векторов e_1, e_2; мы имеем

$$e_1' = Ae_1 = \lambda_1 e_1,$$
$$e_2' = Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Отсюда

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A^* = A$; следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Итак, *если в качестве базиса приняты собственные векторы* e_1, e_2 *данного линейного преобразования, то матрица* A *этого преобразования получает диагональный вид*; на диагонали матрицы A располагаются собственные числа векторов e_1, e_2 в порядке нумерации. В базисе e_1, e_2

данное линейное преобразование представляется формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1, \\ x_2' &= \qquad \lambda_2 x_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В частном случае может быть $\lambda_1 = \lambda_2$. Не имея необходимости различать в этом случае числа λ_1 и λ_2, обозначим их одной буквой λ. Формулы (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1, \\ x_2' &= \qquad \lambda x_2. \end{aligned}$$

Такие формулы определяют *подобие с коэффициентом* λ. *В этом случае каждый вектор плоскости оказывается собственным вектором с собственным числом* $=\lambda$.

109. Пусть теперь $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ — линейное преобразование в пространстве. Предположим, что имеются три некомпланарных собственных вектора этого преобразования: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$; пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — их собственные числа.

В полной аналогии с предыдущим можно показать, что если собственные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ приняты в качестве базиса, то матрица данного линейного преобразования будет иметь диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ данное преобразование получит координатное представление

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1, \\ x_2' &= \qquad \lambda_2 x_2, \\ x_3' &= \qquad\qquad \lambda_3 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В частности, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ и если мы обозначим равные числа λ_1, λ_2, λ_3 одной буквой λ, то формулы (5) будут

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1, \\ x_2' &= \qquad \lambda x_2, \\ x_3' &= \qquad\qquad \lambda x_3. \end{aligned}$$

Такие формулы определяют в пространстве *подобие с коэффициентом λ. В этом случае каждый вектор пространства является собственным вектором с собственным числом λ.*

110. На основании изложенного в последних двух пунктах легко понять важную роль собственных векторов в теории линейных преобразований. Как мы видели, если существует базис из собственных векторов, то в этом базисе преобразование имеет особенно простое координатное представление и вполне определяется собственными числами базисных векторов.

Методы разыскания собственных векторов и собственных чисел излагаются в ближайших параграфах.

§ 22. Характеристическое уравнение матрицы линейного преобразования

111. Рассмотрим сначала линейное преобразование на плоскости $x' = Ax$. Поставим задачу: найти все собственные векторы этого преобразования.

Выберем произвольный базис e_1, e_2; пусть

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

— координатное представление данного преобразования в базисе e_1, e_2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

— матрица преобразования в этом базисе.

Предположим, что вектор $e = \{l;\ m\}$ является собственным вектором данного линейного преобразования, λ — его собственное число. Тогда

$$Ae = \lambda e. \tag{3}$$

В координатах это векторное равенство заменяется двумя числовыми равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= \lambda l, \\ a_{21}l + a_{22}m &= \lambda m. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Перепишем равенства (4) так:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,\qquad(6)$$

поскольку в равенствах (5) хотя бы одно из чисел l, m отлично от нуля (так как собственный вектор, по определению, не равен нулю: $e=\{l\,;m\}\neq 0$). Тем самым показано, что *всякое собственное число является корнем уравнения* (6). Обратно, допустим, что некоторое число λ есть корень уравнения (6). Тогда, если в системе (5) в качестве λ взять именно это число, система (5) будет иметь ненулевое решение l, m (так как определитель системы (5) равен нулю). Рассмотрим вектор $e=\{l;\,m\}$; для координат этого вектора соблюдаются равенства (5), следовательно, для самого вектора e и числа λ имеет место формула (3). Значит, вектор e есть собственный вектор с собственным числом λ.

Мы можем теперь сформулировать следующее правило: *чтобы найти все собственные векторы данного линейного преобразования, нужно прежде всего решить уравнение* (6); *каждый действительный корень* λ *уравнения* (6) *является собственным числом; соответствующие числу* λ *собственные векторы находятся из системы* (5).

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* матрицы данного линейного преобразования.

Пример. Найти собственные векторы преобразования

$$\left.\begin{aligned}x_1'=x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha,\\ x_2'=x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha,\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

где $0<\alpha<\pi$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Развертывая определитель, получаем

$$\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1=0.$$

Отсюда $\lambda_{1,2}=\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha-1}$. Так как $\cos^2\alpha<1$ (при $0<\alpha<\pi$), то корни характеристического уравнения оказываются комплексными числами. Поскольку характеристическое уравнение не имеет действительных корней, данное преобразование не имеет собственных векторов (этот результат легко понять, если учесть, что формулы (*) в прямоугольных координатах представляют вращение на угол α; см. пример 2 в n° 104).

Пример. Найти собственные векторы преобразования

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+x_2, \\ x_2' &= \phantom{x_1+{}} x_2. \end{aligned}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда $(1-\lambda)^2=0$ и $\lambda=1$. Система (5) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\, l+m&=0, \\ (1-\lambda)\, m&=0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\lambda=1$, получим: $m=0$ (l — любое). Таким образом, собственными векторами данного преобразования являются только векторы $\{l;\ 0\}$, лежащие на оси абсцисс.

112. Пусть теперь $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ — линейное преобразование в пространстве. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица этого преобразования в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Аналогично предыдущему можно показать, что собственные числа данного линейного преобразования определяются характеристическим уравнением:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Именно, если λ — любой вещественный корень уравнения (7), то система

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\, l+a_{12}m+a_{13}n&=0, \\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\, m+a_{23}n&=0, \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\, n&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

имеет ненулевое решение l, m, n; вектор $\boldsymbol{e}=\{l;\ m;\ n\}$ есть собственный вектор данного преобразования с собственным числом λ.

113. Если развернуть определитель, стоящий в левой части характеристического уравнения, то получится алгебраический (степенной) многочлен относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы линейного преобразования. В случае линейных преобразований на плоскости характеристический многочлен есть многочлен второй степени, для линейных преобразований в пространстве — третьей степени.

Заметим, что характеристический многочлен является определителем матрицы $A-\lambda E$. В самом деле, для линейных преобразований на плоскости матрица $A-\lambda E$ напишется так:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix};$$

отсюда получаем характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\operatorname{Det}(A-\lambda E).$$

Ясно, что таким же образом выражается и характеристический многочлен для преобразований в пространстве.

114. Имеет место следующая важная

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть A — матрица данного линейного преобразования в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\tilde{A}$ — матрица того же преобразования в новом базисе $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$; пусть L — матрица преобразования координат при переходе от старого базиса к новому. Согласно § 8 и 20 (n° 101)

$$\tilde{A}=L^{-1}AL.$$

Кроме того, для единичной матрицы имеем соотношение

$$E=L^{-1}EL.$$

Из последних двух равенств получаем

$$\tilde{A}-\lambda E=L^{-1}(A-\lambda E)L.$$

Из этого матричного равенства и на основании теоремы об определителе произведения матриц вытекает числовое равенство

$$\operatorname{Det}(\tilde{A}-\lambda E)=\operatorname{Det} L^{-1}\cdot\operatorname{Det}(A-\lambda E)\cdot\operatorname{Det} L.$$

Но

$$\operatorname{Det} L^{-1}\cdot\operatorname{Det} L=\operatorname{Det} L^{-1}L=\operatorname{Det} E=1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Det}(\tilde{A}-\lambda E)=\operatorname{Det}(A-\lambda E)$$

и теорема доказана.

115. Последнее тождество, наличие которого утверждает теорема, мы напишем для случая линейных преобразований на плоскости подробно:

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{11}-\lambda & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Здесь $\tilde{a}_{ik}$ — элементы матрицы $\tilde{A}$, a_{ik} — элементы матрицы A, λ — любое число. Развертывая определители, получим

$$\lambda^2-(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22})\lambda+(\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}-\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21})=$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}).$$

Так как это — тождество, т. е. равенство, справедливое при любом λ, то

$$\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}=a_{11}+a_{22},$$
$$\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}-\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Таким образом, для линейных преобразований на плоскости доказанная теорема означает, что *величины* $a_{11}+a_{22}$ *и* $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ *являются инвариантами матрицы линейного преобразования*, т. е. что эти величины не меняются при переходе к новому базису. Величина $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ представляет собой не что иное, как определитель матрицы A; инвариантность этой величины доказана еще в § 18.

Матрица линейного преобразования в пространстве имеет три инварианта; они находятся аналогичным способом. Выписывать их мы не будем.

§ 23. Симметрические линейные преобразования. Приведение к диагональному виду матрицы симметрического преобразования на плоскости

116. В § 21 мы показали, что матрица линейного преобразования принимает диагональный вид, если в качестве базиса приняты собственные векторы. Координатное представление линейного преобразования в таком базисе оказывается особенно простым.

Однако не для всякого линейного преобразования возможно такое упрощение матрицы и координатного представления. В самом деле, например, на плоскости встречаются линейные преобразования, которые совсем не имеют собственных векторов; возможны преобразования, которые имеют только коллинеарные собственные векторы (см. примеры в n° 111). Для таких преобразований выбрать базис, состоящий из собственных векторов, нельзя.

Далее, мы будем изучать некоторый специальный класс линейных преобразований, называемых *симметрическими*. Они существенно применяются в алгебре, в геометрии, в механике. Симметрические преобразования всегда имеют собственные векторы, из которых можно составить базис. Вместе с тем матрица всякого симметрического преобразования приводится к диагональному виду.

117. Пусть дано линейное преобразование $x'=Ax$ (на плоскости или в пространстве). Рассмотрим два произвольных вектора x, y; $x'=Ax$, $y'=Ay$ — их образы. Данное линейное преобразование называется *симметрическим*, если скалярное произведение xy' равно скалярному произведению yx':

$$xy'=yx'. \tag{1}$$

Иначе говоря, *линейное преобразование* $x'=Ax$ *является симметрическим, если*

$$xAy=yAx \tag{2}$$

для любых векторов x *и* y.

118. В дальнейшем, изучая симметрические преобразования, мы будем употреблять только такие базисы, которые состоят из единичных и перпендикулярных (ортогональных) друг к другу векторов:

1) на плоскости: $e_1 = i$, $e_2 = j$,

2) в пространстве $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = k$.

Такого рода базисы будем называть *ортогональными*.

119. Докажем, что *всякое симметрическое линейное преобразование в любом ортогональном базисе имеет симметрическую матрицу* (т. е. элементы a_{ik} и a_{ki} этой матрицы одинаковы: $a_{ik} = a_{ki}$).

Чтобы не писать слишком длинных выражений, проведем доказательство для случая симметрических преобразований на плоскости.

Напишем разложения образов базисных векторов:

$$\left.\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Умножим скалярно обе части первого из этих равенств на вектор e_2, а обе части второго — на вектор e_1; принимая во внимание, что $e_1e_2 = 0$, $e_1e_1 = 1$, $e_2e_2 = 1$, получим

$$e_2Ae_1 = a_{21}, \quad e_1Ae_2 = a_{12}.$$

По условию симметрии преобразования имеем $e_2Ae_1 = e_1Ae_2$. Отсюда

$$a_{21} = a_{12},$$

что и означает симметрию матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Справедливо также обратное утверждение: *если в некотором ортогональном базисе матрица линейного преобразования симметрична, то симметрично и само преобразование.*

Доказательство этого утверждения мы также проведем для случая линейных преобразований на плоскости.

Предположим, что для разложений (3) соблюдается равенство $a_{21} = a_{12}$. Пусть x, y — два произвольных вектора

$$x = x_1e_1 + x_2e_2, \quad y = y_1e_1 + y_2e_2.$$

Используя разложения (3), получим

$$\begin{aligned} Ax &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\,e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\,e_2, \\ Ay &= y_1Ae_1 + y_2Ae_2 = \\ &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\,e_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\,e_2. \end{aligned}$$

Составим скалярные произведения x на Ay и y на Ax:

$$\begin{aligned} xAy &= x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2, \\ yAx &= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2. \end{aligned}$$

Так как $a_{21} = a_{12}$, то из предыдущих равенств находим

$$xAy = yAx,$$

что и доказывает симметрию преобразования.

120. Наша главная цель — доказать, что: 1) *каждое симметрическое линейное преобразование на плоскости имеет по крайней мере одну пару собственных векторов, которые перпендикулярны друг к другу*; 2) *каждое симметрическое линейное преобразование в пространстве имеет по крайней мере одну тройку попарно перпендикулярных собственных векторов*. Вместе с тем мы имеем в виду показать, как практически находить такие пары или тройки собственных векторов.

В остальных пунктах этого параграфа поставленный вопрос будет решен для симметрических линейных преобразований на плоскости.

121. Пусть на плоскости задано симметрическое линейное преобразование $x' = Ax$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— его матрица в некотором ортогональном базисе e_1, e_2. Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Ввиду симметрии матрицы A имеем $a_{21}=a_{12}$. Поэтому уравнение (4) запишется так:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0.$$

Отсюда получаем корни уравнения (4):

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}}{2}. \qquad (5)$$

Заметим, что

$$(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0;$$

следовательно, числа λ_1, λ_2 вещественны. Итак, *если матрица симметрична, то характеристическое уравнение этой матрицы имеет только вещественные корни.*

Согласно n° 114 для каждого корня ($\lambda=\lambda_1$ или $\lambda=\lambda_2$) характеристического уравнения (4) найдется собственный вектор $\boldsymbol{a}=\{l;\ m\}$, имеющий корень λ своим собственным числом; координаты вектора $\boldsymbol{a}=\{l;\ m\}$ даются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m&=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Условимся решение l, m системы (6) называть *нормированным*, если $l^2+m^2=1$; если l, m — нормированное решение, то $\boldsymbol{a}=\{l;\ m\}$ — единичный вектор. Мы будем обозначать дальше через l_1, m_1 нормированное решение системы (6), получаемое при $\lambda=\lambda_1$; аналогично через l_2, m_2 будет обозначаться нормированное решение, получаемое при $\lambda=\lambda_2$. Тогда $\boldsymbol{a}_1=\{l_1;\ m_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{l_2;\ m_2\}$ — единичные собственные векторы с собственными числами λ_1 и λ_2.

122. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения различны: $\lambda_1\neq\lambda_2$. Докажем, что *в этом случае векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ перпендикулярны друг к другу.* Для доказательства напишем соотношения

$$A\boldsymbol{a}_1=\lambda_1\boldsymbol{a}_1,\quad A\boldsymbol{a}_2=\lambda_2\boldsymbol{a}_2, \qquad (7)$$

которые выражают тот факт, что $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ являются собственными векторами с собственными числами λ_1 и λ_2. Умножим скалярно обе части первого равенства (7) на вектор $\boldsymbol{a}_2$, обе части второго — на вектор $\boldsymbol{a}_1$.

Мы получим

$$a_2Aa_1 = \lambda_1 a_1 a_2, \quad a_1 A a_2 = \lambda_2 a_1 a_2.$$

Вследствие симметрии преобразования имеем

$$a_2 A a_1 = a_1 A a_2.$$

Отсюда и на основании предыдущих равенств

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, a_1 a_2 = 0. \tag{8}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из (8) следует $a_1 a_2 = 0$, т. е. перпендикулярность векторов a_1 и a_2. Тем самым наше утверждение доказано.

123. Предположим теперь, что характеристическое уравнение (4) имеет равные корни: $\lambda_1 = \lambda_2$; будем обозначать их одной буквой λ. Из формулы (5) следует, что в этом случае $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$ и

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

Но тогда $a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$; значит, $a_{11} = a_{22} = \lambda$, и преобразование представляется формулами $x'_1 = \lambda x_1$, $x'_2 = \lambda x_2$. Такое преобразование, как мы знаем, есть подобие с коэффициентом λ. Если $x' = Ax$ — подобие, то каждый вектор является собственным вектором с собственным числом λ. В качестве пары взаимно перпендикулярных собственных векторов можно взять любую пару ненулевых векторов a_1, a_2, лишь бы они были перпендикулярны друг к другу.

124. Итак, *всякое симметрическое линейное преобразование на плоскости имеет пару взаимно перпендикулярных собственных векторов* a_1, a_2.

Если эти векторы принять в качестве базисных: $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, то матрица преобразования получит диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2 — собственные числа векторов a_1, a_2. Отсюда следует, что *каждое симметрическое линейное преобразование на плоскости является произведением двух сжатий по двум перпендикулярным направлениям* (см. n° 17).

125. Сформулируем теперь в окончательном виде план решения задачи о выборе ортогонального базиса из собственных векторов симметрического линейного преобразования $x' = Ax$.

Пусть A — матрица данного преобразования в любом ортогональном базисе e_1, e_2. Нужно прежде всего составить характеристическое уравнение матрицы A и найти его корни $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ (λ_1, λ_2 будут вещественными числами). Возможны два случая:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае следует подставить в систему (6) $\lambda = \lambda_1$, затем $\lambda = \lambda_2$ и каждый раз найти нормированное решение этой системы l_1, m_1 и l_2, m_2. Векторы

$$a_1 = \{l_1;\ m_1\}, \quad a_2 = \{l_2;\ m_2\}$$

будут единичными собственными векторами с собственными числами λ_1 и λ_2; a_1 и a_2 обязательно окажутся перпендикулярными друг к другу. Искомый базис определяется единственным образом: $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$ (если не говорить о возможности изменить нумерацию векторов $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ или заменить их противоположными по направлению).

2) $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае преобразование является подобием и в качестве $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ можно взять любую пару единичных и перпендикулярных друг к другу векторов.

При переходе к новому ортогональному базису $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ координаты всех векторов данной плоскости преобразуются по формулам § 17, где

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix};$$

матрица L — ортогональная.

Пример. В ортогональном базисе e_1, e_2 дано линейное преобразование $x' = Ax$:

$$x_1' = 6x_1 + 2x_2,$$
$$x_2' = 2x_1 + 3x_2.$$

Привести матрицу этого преобразования к диагональному виду путем перехода к новому ортогональному базису.

Решение. Матрица данного преобразования симметрична:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

следовательно, поставленная задача может быть решена по изложенному выше плану. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Корни этого уравнения суть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$. Соответствующие собственные векторы найдем из системы (6) n° 121; в данном случае эта система имеет вид

$$\begin{aligned} (6-\lambda)\, l + 2m &= 0, \\ 2l + (3-\lambda)\, m &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда $\lambda = \lambda_1 = 2$, получим

$$\begin{aligned} 4l + 2m &= 0, \\ 2l + m &= 0. \end{aligned}$$

В качестве решения можно взять $l = 1$, $m = -2$. Нормируя это решение, найдем единичный собственный вектор с собственным числом $\lambda_1 = 2$:

$$\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Аналогично найдем единичный собственный вектор с собственным числом $\lambda_2 = 7$:

$$\tilde{e}_2 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

При переходе к базису $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ координаты всех векторов (и точек) преобразуются по формулам § 17 с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

именно

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x}_2, \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \tilde{x}_2, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2, \\ \tilde{x}_2 &= \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2. \end{aligned}\right\}.$$

В базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ матрица данного линейного преобразования имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

само преобразование представляется формулами

$$\tilde{x}'_1 = 2\tilde{x}_1,$$
$$\tilde{x}'_2 = \quad 7\tilde{x}_2.$$

Заметим, что если расположение векторов $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ нас не интересует, то задача решается короче: достаточно знать, что $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$, чтобы написать $\tilde{A}$ сразу.

§ 24. Приведение к диагональному виду матрицы симметрического линейного преобразования в пространстве

126. Пусть $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ — симметрическое линейное преобразование в пространстве. Требуется доказать, что оно имеет три попарно перпендикулярных собственных вектора.

Выберем какой-нибудь ортогональный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. В этом базисе данное преобразование получит координатное представление с симметричной матрицей A. Составим характеристическое уравнение матрицы A. Для симметрических преобразований в пространстве, как и на плоскости, характеристическое уравнение имеет только вещественные корни. Однако в пространственном случае этот факт доказывается не очень просто и мы пока не будем на него опираться. С другой стороны, совсем легко доказать, что характеристическое уравнение матрицы A имеет хотя бы один вещественный корень. Дело в том, что характеристическое уравнение матрицы линейного преобразования в пространстве есть уравнение третьей степени, а всякое уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.

Чтобы убедиться в этом, напишем произвольное уравнение третьей степени $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Ясно, что при достаточно больших по абсолютной величине значениях λ первый член этого уравнения будет подавляюще велик по сравнению с остальными членами. Поэтому, если $Q > 0$ — достаточно большое число, то при $\lambda = -Q$ левая часть уравнения будет отрицательна, а при $\lambda = +Q$ — положительна. Если λ возрастает от $-Q$ до $+Q$, то левая часть уравнения, непрерывно изменяясь, сменит знак. Следовательно, при некотором значении $\lambda = \lambda_1$ левая часть уравнения станет равной нулю. Тем самым доказано наличие вещественного корня λ.

Согласно n° 112 по любому вещественному корню λ характеристического уравнения находится собственный вектор линейного преобразования с собственным числом λ (путем решения системы (8) n° 112).

Отсюда приходим к важному выводу: *всякое линейное преобразование в пространстве имеет хотя бы один собственный вектор.*

В дальнейших рассуждениях мы уже существенно воспользуемся условием, что данное нам линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ является симметрическим.

По доказанному один собственный вектор данного преобразования обязательно найдется; обозначим его через $\boldsymbol{a}_1$. Пусть λ_1 — собственное число этого вектора. Проведем через начало координат плоскость α_1, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{a}_1$. Возьмем в плоскости α_1 произвольный вектор $\boldsymbol{x}$; убедимся, что его образ $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ также лежит в плоскости α_1. Чтобы установить этот факт, заметим, что скалярное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x} = 0$ (так как вектор $\boldsymbol{x}$ мы взяли в плоскости α_1). Подсчитаем скалярное произведение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}'$. Имеем

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}_1 A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} A\boldsymbol{a}_1.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку преобразование является симметрическим. Так как $\boldsymbol{a}_1$ — собственный вектор с собственным числом λ_1, то $A\boldsymbol{a}_1 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1$; поэтому

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}(\lambda_1\boldsymbol{a}_1) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}) = 0.$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{x}'$ перпендикулярен к $\boldsymbol{a}_1$, т. е. лежит в плоскости α_1, что и утверждалось.

На основании только что доказанного мы можем рассматривать преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ как преобразование векторов плоскости α_1, если в качестве $\boldsymbol{x}$ брать только векторы этой плоскости (поскольку образы таких векторов остаются в той же плоскости). Но согласно § 23 всякое линейное симметрическое преобразование на плоскости имеет пару перпендикулярных собственных векторов. Следовательно, и данное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ имеет в плоскости α_1 пару перпендикулярных собственных векторов; обозначим их через $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Вместе с тем мы получаем в пространстве три вектора $\boldsymbol{a}_1$,

a_2, a_3, каждый из которых является собственным вектором и перпендикулярен к двум другим.

Итак, мы доказали, что *всякое симметрическое линейное преобразование в пространстве имеет хотя бы одну тройку попарно перпендикулярных собственных векторов.*

127. Предполагая векторы a_1, a_2, a_3 единичными, примем их в качестве нового ортогонального базиса: $\tilde{e}_1 = a_1$, $\tilde{e}_2 = a_2$, $\tilde{e}_3 = a_3$. Матрица данного преобразования получит в этом базисе диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — собственные числа векторов a_1, a_2, a_3. Отсюда заключаем: *каждое симметрическое линейное преобразование в пространстве есть произведение трех сжатий по трем попарно перпендикулярным направлениям* (см. n° 95). В частности, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то преобразование является подобием (см. n° 109).

128. Составим характеристический многочлен матрицы $\tilde{A}$:

$$\operatorname{Det}(\tilde{A} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Очевидно, числа λ_1, λ_2, λ_3 являются корнями этого многочлена. Вспомним теперь теорему n° 114, которая утверждает, что характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса. Из этой теоремы следует, что в любом базисе характеристический многочлен матрицы данного симметрического преобразования имеет своими корнями числа λ_1, λ_2, λ_3. Тем самым мы доказали, что *характеристическое уравнение матрицы симметрического линейного преобразования имеет только действительные корни.*

129. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения. Рассмотрим следующие случаи.

1) Числа λ_1, λ_2, λ_3 — все разные. Согласно n° 112 найдутся собственные векторы a_1, a_2, a_3 с собственными числами λ_1, λ_2, λ_3. Эти векторы обязательно будут перпен-

дикулярными друг к другу (см. n° 122). Мы можем считать векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ единичными. При этом условии тройка векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ единственна с точностью до знаков. В самом деле, никакой вектор, кроме $\pm\boldsymbol{a}_1$, не может быть единичным собственным вектором с собственным числом λ_1, так как он не будет перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. По той же причине, кроме $\pm\boldsymbol{a}_2$ и $\pm\boldsymbol{a}_3$, нет других единичных собственных векторов с собственными числами λ_2 и λ_3.

2) Среди чисел λ_1, λ_2, λ_3 — два одинаковых; пусть, например, $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Обозначим $\lambda_2 = \lambda_3$ одной буквой λ. В данном случае λ — двукратный корень характеристического уравнения.

Докажем, что *имеется определенный с точностью до знака единичный собственный вектор* $\boldsymbol{a}_1$ *с собственным числом* λ_1. Наоборот, *двукратному корню* λ *соответствует бесконечное множество единичных собственных векторов с одним и тем же собственным числом* λ. Именно, каждый вектор, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}_1$, будет собственным вектором данного линейного преобразования с собственным числом λ.

Для доказательства этого утверждения вернемся к n° 126, согласно которому данное симметрическое преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ имеет тройку попарно перпендикулярных собственных векторов; обозначим их через $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ (считая для удобства изложения единичными). На основании n° 127 и 128 заключаем, что в рассматриваемом случае два из этих трех векторов должны иметь одно и то же собственное число λ $(\lambda = \lambda_2 = \lambda_3)$; пусть это будут векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$. Тогда $\boldsymbol{a}_1$ имеет собственное число λ_1 $(\lambda_1 \neq \lambda)$. Обозначим через α_1 плоскость, проходящую через начало координат и перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{a}_1$. Плоскость α_1 содержит векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$. В n° 126 показано, что данное преобразование можно рассматривать как линейное преобразование векторов плоскости α_1. Но такое преобразование является подобием (на плоскости α_1), поскольку имеет два взаимно перпендикулярных собственных вектора ($\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$) с одинаковыми собственными числами (см. n° 123). Следовательно, все векторы, лежащие в плоскости α_1, являются собственными векторами данного преобразования с одним и тем же собственным числом λ.

Остается показать, что никакой вектор, кроме $\pm \boldsymbol{a}_1$, не может быть единичным собственным вектором с собственным числом λ_1 (λ_1 — простой корень характеристического уравнения). Но это ясно, так как всякий собственный вектор, имеющий собственное число λ_1, должен быть перпендикулярным к плоскости α_1 (вспомним, что в α_1 лежат собственные векторы с собственным числом λ и что $\lambda_1 \neq \lambda$). Ясно также, что единичный вектор, перпендикулярный к α_1, есть либо $\boldsymbol{a}_1$, либо $-\boldsymbol{a}_1$. Утверждение доказано полностью.

3) Все числа λ_1, λ_2, λ_3 одинаковы, т. е. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ есть трехкратный корень характеристического уравнения.

В этом случае данное преобразование является подобием в пространстве с коэффициентом λ (см. n° 127). Следовательно, каждый вектор пространства является собственным вектором данного преобразования с собственным числом λ (см. n° 109).

130. После всего изложенного можно указать следующий план решения задачи о нахождении ортогонального базиса из собственных векторов симметрического линейного преобразования в пространстве.

Пусть $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ — симметрическое преобразование в пространстве,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— его матрица в каком-нибудь ортогональном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (A симметрична, т. е. $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$).

Для решения нашей задачи нужно прежде всего составить характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

затем найти корни этого уравнения $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ (числа λ_1, λ_2, λ_3 вещественны).

Согласно n° 112 для каждого корня λ ($= \lambda_1$, λ_2, λ_3) характеристического уравнения найдется собственный вектор $\boldsymbol{a} = \{l;\ m;\ n\}$, имеющий корень λ своим собственным числом;

координаты вектора $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$ даются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n=0,\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)\,m+a_{23}n=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)\,n=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

(причем система (2) заведомо имеет ненулевое решение l, m, n, если λ — корень уравнения (1)).

Дальнейшие действия сводятся к нахождению нужных решений системы (2) при $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$.

Условимся решение l, m, n системы (2) называть *нормированным*, если $l^2+m^2+n^2=1$. Если l, m, n — нормированное решение, то $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$ — единичный вектор. Мы будем обозначать дальше через l_1, m_1, n_1 нормированное решение системы (2), получаемое при $\lambda=\lambda_1$; аналогично через l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 будут обозначаться нормированные решения, которые получаются при $\lambda=\lambda_2$ и $\lambda=\lambda_3$. Тогда

$$\boldsymbol{a}_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\},\quad \boldsymbol{a}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\},\quad \boldsymbol{a}_3=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}$$

— единичные собственные векторы с собственными числами λ_1, λ_2, λ_3.

Возможны три случая:

1) λ_1, λ_2, λ_3 — все разные. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ обязательно окажутся перпендикулярными друг к другу; тройка векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ определится единственным образом с точностью до знаков (см. n° 129). Искомый базис: $\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\boldsymbol{a}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{a}_3$.

2) Среди чисел λ_1, λ_2, λ_3 — два одинаковых; например, $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$.

В этом случае согласно n° 129 числу $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$ соответствует бесконечное множество единичных собственных векторов, причем все они лежат в одной плоскости. Следовательно, если мы подставим в систему (2) число $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$, то в этой системе будет только одно существенное уравнение (два других должны быть ему пропорциональны). Допустим, что существенным уравнением системы (2) является

$$(a_{11}-\lambda)\,l+a_{12}m+a_{13}n=0;\tag{3}$$

когда мы говорим, что уравнение (3) существенно, то имеем в виду, что оно — не тождество, т. е. что среди его коэффициентов $a_{11}-\lambda$, a_{12}, a_{13} имеются отличные от нуля.

Всякое ненулевое решение l, m, n уравнения (3) определяет собственный вектор $\{l;\ m;\ n\}$ с собственным числом λ $(\lambda=\lambda_2=\lambda_3)$. Уравнение (3) означает, что все такие векторы перпендикулярны к вектору $\boldsymbol{a}=\{a_{11}-\lambda;\ a_{12};\ a_{13}\}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{a}$ есть собственный вектор с собственным числом λ_1 (λ_1 — простой корень характеристического уравнения). Задача может быть завершена следующим способом. Разделим вектор $\boldsymbol{a}$ на его модуль; мы получим единичный собственный вектор $\boldsymbol{a}_1$ с собственным числом λ_1. Затем найдем любое нормированное решение l_2, m_2, n_2 уравнения (3). Вектор $\boldsymbol{a}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}$ будет единичным собственным вектором с собственным числом λ $(\lambda=\lambda_2=\lambda_3)$. Умножим векторно $\boldsymbol{a}_1$ на $\boldsymbol{a}_2$; мы получим единичный вектор $\boldsymbol{a}_3$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{a}_1$. Следовательно, $\boldsymbol{a}_3$ есть собственный вектор с собственным числом $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$; кроме того, $\boldsymbol{a}_3$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{a}_2$. Таким образом, искомый базис получен: $\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{a}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\boldsymbol{a}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{a}_3$.

3) Числа λ_1, λ_2, λ_3 все одинаковы, т. е. $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ — трехкратный корень характеристического уравнения.

В этом случае данное преобразование есть подобие в пространстве с коэффициентом λ. Для такого преобразования все векторы пространства являются собственными векторами с собственным числом λ. В качестве искомого базиса можно взять любую тройку единичных попарно перпендикулярных векторов $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$ (например, первоначально данную тройку $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$).

131. Мы показали, как для любого симметрического преобразования в пространстве найти базис, состоящий из единичных перпендикулярных друг к другу собственных векторов $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$. Если $\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3=\{l_3;\ m_3;\ n_3\}$, то при переходе к этому базису координаты всех векторов пространства преобразуются по формулам § 20, где

$$L=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix};$$

матрица L — ортогональная.

132. Пример. В ортогональном базисе e_1, e_2, e_3 дано линейное преобразование:

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 - 2x_2, \\ x_2' &= -2x_1 + 6x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= -2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Путем перехода к новому ортогональному базису привести матрицу данного преобразования к диагональному виду.

Решение. Составим матрицу преобразования в данном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A симметрична, следовательно, задача может быть решена по изложенному выше плану.

Имеем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Корни различны, значит, мы находимся в условиях первого случая n° 130. Напишем по данным задачи систему (2):

$$\begin{aligned} (7-\lambda)\, l - 2m \qquad\qquad &= 0, \\ -2l + (6-\lambda)\, m - 2n &= 0, \\ -2m + (5-\lambda)\, n &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда поочередно $\lambda = 3$, 6, 9 и каждый раз находя нормированные решения этой системы, получим три единичных вектора:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \{l_1;\ m_1;\ n_1\} = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}, \\ \tilde{e}_2 &= \{l_2;\ m_2;\ n_2\} = \left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}, \\ \tilde{e}_3 &= \{l_3;\ m_3;\ n_3\} = \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}. \end{aligned}$$

Векторы $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ являются собственными векторами данного преобразования с собственными числами $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. В базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ данное преобразование имеет матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

координатное представление

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1' &= 3\tilde{x}_1,\\ \tilde{x}_2' &= \qquad 6\tilde{x}_2,\\ \tilde{x}_3' &= \qquad\qquad 9\tilde{x}_3.\end{aligned}$$

При переходе к базису $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ координаты всех векторов могут быть пересчитаны с помощью матричного равенства

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Пример. В ортогональном базисе e_1, e_2, e_3 дано линейное преобразование

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1+2x_2-4x_3,\\ x_2' &= 2x_1-2x_2-2x_3,\\ x_3' &= -4x_1-2x_2+x_3.\end{aligned}$$

Путем перехода к новому ортогональному базису привести матрицу данного преобразования к диагональному виду.

Решение. В данном базисе имеем симметричную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, задачу можно решить по плану n° 130. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^3-27\lambda-54=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-3$. Среди корней—два одинаковых; следовательно, мы находимся в условиях второго случая n° 130. Напишем по данным задачи систему (2):

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\,l+\quad 2m\quad -4n&=0,\\ 2\,l+(-2-\lambda)\,m\quad -2n&=0,\\ -4\,l\quad -2m+(1-\lambda)\,n&=0.\end{aligned}$$

Подставим сюда двукратный корень $\lambda=\lambda_2=\lambda_3=-3$; мы получим

$$\begin{aligned} 4l+2m-4n&=0,\\ 2l+\ m-2n&=0,\\ -4l-2m+4n&=0. \end{aligned}$$

Система свелась к одному существенному уравнению:

$$2l+m-2n=0. \qquad (*)$$

Согласно п° 130 заключаем, что вектор $\{2;\ 1;\ -2\}$, координатами которого служат коэффициенты уравнения (*), является собственным вектором с собственным числом $\lambda_1=6$; деля этот вектор на его модуль, получим единичный вектор:

$$\tilde{e}_1=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Возьмем теперь любое решение уравнения (*), например $l=1$, $m=2$, $n=2$; нормируя это решение, получим вектор

$$\tilde{e}_2=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Вектор $\tilde{e}_2$ является единичным собственным вектором с собственным числом -3. Умножая векторно $\tilde{e}_1$ на $\tilde{e}_2$, найдем еще один единичный собственный вектор с собственным числом -3:

$$\tilde{e}_3=\left\{\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right\}.$$

Векторы $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ составляют ортогональный базис. После перехода к этому базису матрица данного преобразования примет диагональный вид

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Мы имеем

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Следовательно, преобразование, которое дано в рассмотренной задаче, есть произведение трех сжатий: 1) к плоскости $O\tilde{e}_2\tilde{e}_3$ с коэффициентом 6; 2) к плоскости $O\tilde{e}_1\tilde{e}_3$ с коэффициентом -3; 3) к плоскости $O\tilde{e}_1\tilde{e}_2$ с коэффициентом -3. Заметим прежде всего, что коэффициенты этих сжатий по модулю больше единицы; поэтому фактически мы имеем дело с растяжениями пространства (например, в первом случае каждая точка удаляется от плоскости $O\tilde{e}_2\tilde{e}_3$ так, что ее первоначальное расстояние от этой плоскости увеличивается в шесть раз). Кроме того, во втором и в третьем случаях коэффициент сжатия является отрицательным числом. Чтобы пояснить, что это означает геометрически, рассмотрим, например, преобразование, которое определяется последней матрицей в правой части (**), его координатное представление:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_1 &= \tilde{x}_1, \\ \tilde{x}'_2 &= \tilde{x}_2, \\ \tilde{x}'_3 &= -3\tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при таком преобразовании не только меняется расстояние от точки до плоскости $O\tilde{e}_1\tilde{e}_2$ (в три раза), но образ $M'(\tilde{x}'_1;\ \tilde{x}'_2;\ \tilde{x}'_3)$ и прообраз $M(\tilde{x}_1;\ \tilde{x}_2;\ \tilde{x}_3)$ оказываются по разные стороны от этой плоскости.

§ 25. Приведение к каноническому виду квадратичной формы. Приложения в теории линий и поверхностей второго порядка

133. *Квадратичной формой от двух переменных* x_1, x_2 *называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных*:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{1}$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{22} — числа, задание которых определяет форму; их называют *коэффициентами* формы. Вместо a_{12} можно писать a_{21}, считая $a_{21} = a_{12}$. Пусть на некоторой плоскости введена система координат с началом O и масштабными векторами e_1, e_2. Тогда x_1, x_2 можно рассматривать как координаты некоторой точки M, а число Φ — как значение формы в точке $M(x_1;\ x_2)$. Величины x_1, x_2 мы будем рассматривать также как координаты вектора $x = \overline{OM}$.

134. Предположим, что базис e_1, e_2 заменяется новым базисом $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$. При этом координаты всех точек и векторов изменятся по формулам § 17. Величина Φ выразится через новые координаты $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ точки M в виде некоторой новой квадратичной формы от $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$. Коэффициенты получаемой таким путем формы определенным образом выражаются через коэффициенты первоначально данной формы и через коэффициенты формул преобразования координат. Наша ближайшая цель — найти эти выражения.

Для упрощения дела условимся употреблять только ортогональные базисы (из единичных векторов).

135. Перепишем данную квадратичную форму следующим образом:

$$\Phi = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2). \tag{2}$$

Составим матрицу из коэффициентов формы, беря строчки соответственно скобкам в правой части последнего равенства:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Эта матрица называется *матрицей квадратичной формы* (1) в заданном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Очевидно, матрица A симметрична ($a_{21} = a_{12}$). Вместе с данной формой рассмотрим линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, которое в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет матрицу A; координатным представлением преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ будет

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Так как $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — ортогональный базис, а матрица A симметрична, то и преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ является симметрическим. Выражение (2) теперь можем переписать так:

$$\Phi = x_1x_1' + x_2x_2'. \tag{5}$$

Вследствие ортогональности базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ правая часть (5) представляет собой не что иное, как скалярное произведение вектора $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$:

$$\Phi = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Перейдем теперь к новому ортогональному базису $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 &= l_1\boldsymbol{e}_1 + m_1\boldsymbol{e}_2, \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 &= l_2\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Как обычно, обозначим через L матрицу, которая получается транспонированием матрицы коэффициентов (7):

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица L ортогональна, т. е. $L^{-1} = L^*$. В новом базисе линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ будет иметь новое координатное представление:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}_1' &= \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2,\\ \tilde{x}_2' &= \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

с матрицей

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Вследствие симметрии преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ матрица $\tilde{A}$ также будет симметричной $(\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{21})$. В равенствах (8) $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ являются новыми координатами вектора $\boldsymbol{x}$, а $\tilde{x}_1'$, $\tilde{x}_2'$ — новыми координатами вектора $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Вследствие ортогональности нового базиса можем написать

$$\Phi = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' = \tilde{x}_1\tilde{x}_1' + \tilde{x}_2\tilde{x}_2'.$$

Заменяя здесь $\tilde{x}_1'$, $\tilde{x}_2'$ по формулам (8), получим

$$\Phi = \tilde{x}_1(\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2) + \tilde{x}_2(\tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2) = \\ = \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{a}_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2^2.$$

Мы видим, что элементы матрицы $\tilde{A}$ являются в то же время коэффициентами квадратичной формы Φ в новых координатах. Следовательно, определение этих коэффициентов равносильно определению матрицы $\tilde{A}$. Тем самым дело сводится к прямому применению результатов § 18; имеем

$$\tilde{A} = L^{-1}AL.$$

Так как $L^{-1} = L^*$, то

$$\tilde{A} = L^*AL. \tag{10}$$

В подробной записи:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Равенство (10) *выражает матрицу* $\tilde{A}$ *данной квадратичной формы в новом базисе* $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ *через матрицу* A *этой формы в старом базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *и через матрицу* L *преобразования координат.*

136. Важной задачей математики и ее приложений является задача приведения данной квадратичной формы к каноническому виду.

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если она содержит только члены с квадратами текущих координат, т. е. если $a_{12}=a_{21}=0$. В этом случае матрица формы является диагональной:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы произвольную форму привести к каноническому виду, нужно найти такой базис, в котором матрица формы получает диагональный вид. Выше, в n° 135, мы видели, что при переходе от ортогонального базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ к новому ортогональному базису $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$ матрица квадратичной формы изменяется точно так же, как матрица симметрического линейного преобразования. Поэтому задача о приведении к каноническому виду формы (1) сводится к задаче о приведении к диагональному виду матрицы линейного преобразования (4). Решение этой последней задачи изложено в § 23.

Согласно сказанному, приведение квадратичной формы от двух переменных x_1, x_2 к каноническому виду можно осуществить по следующему плану.

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ дана форма

$$\Phi=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_{22}^2$$

с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1) Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Найдем корни этого уравнения λ_1, λ_2.

2) Следуя указаниям § 23, найдем для симметрического преобразования (4) два единичных собственных вектора с собственными числами λ_1, λ_2 так, чтобы эти векторы были перпендикулярны друг к другу; обозначим их соответственно через $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\{l_1;\ m_1\},\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_2=\{l_2;\ m_2\}.$$

3) Перейдем к базису $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$. В этом базисе

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

и данная форма получает канонический вид:

$$\Phi=\lambda_1\tilde{x}_1^2+\lambda_2\tilde{x}_2^2. \qquad (11)$$

При переходе к базису e_1, e_2 координаты всех векторов преобразуются согласно матричному равенству

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi=5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $(\lambda-5)^2-16=0$. Отсюда $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$. Канонический вид данной квадратичной формы можем написать сразу:

$$\Phi=\tilde{x}_1^2+9\tilde{x}_2^2.$$

Чтобы найти базис, в котором форма имеет такой вид, придется искать собственные векторы преобразования (4). Напишем систему уравнений, определяющую искомые собственные векторы:

$$\begin{aligned} &(5-\lambda)\,l+4m=0, \\ &4l+(5-\lambda)\,m=0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Подставляя сюда $\lambda=\lambda_1=1$, $\lambda=\lambda_2=9$ и беря каждый раз нормированное решение системы (*), найдем векторы

$$\tilde{e}_{-1}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\quad \tilde{e}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Они составляют нужный базис.

При переходе к базису $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ координаты всех векторов преобразуются по формулам

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_2,$$

$$x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_2.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти формулы действительно дают преобразование нашей квадратичной формы к каноническому виду.

137. Вернемся к n°135. Вместе с данной квадратичной формой мы ввели там некоторое симметрическое линейное преобразование $x'=Ax$; оно определяется формулами (4) и имеет ту же матрицу, что и данная квадратичная форма.

Направления собственных векторов преобразования $x' = Ax$ называются *главными направлениями* данной формы.

Когда мы приводим квадратичную форму к каноническому виду, то при этом мы переходим к ортогональному базису, векторы которого имеют главные направления данной формы.

138. Коэффициенты λ_1, λ_2 в каноническом виде (11) квадратичной формы называются *характеристическими числами* квадратичной формы. Они же — корни характеристического уравнения; они же и собственные числа собственных векторов линейного преобразования $x' = Ax$, о котором шла речь в предыдущем пункте.

139. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то форма имеет единственную пару главных направлений, причем они перпендикулярны друг к другу. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то любое направление является главным (см. § 23). В последнем случае форма в любом ортогональном базисе имеет канонический вид $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2$, где $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

140. Зная характеристические числа формы, можно установить оценки величины этой формы.

В самом деле, пусть в ортогональном базисе e_1, e_2 дана форма

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Переходя к новому ортогональному базису $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, приведем ее к каноническому виду

$$\Phi = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2.$$

Допустим, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Тогда

$$\lambda_1(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) \leqslant \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 \leqslant \lambda_2(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2).$$

Так как базисы e_1, e_2 и $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ оба ортогональны, то $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = x_1^2 + x_2^2$. Следовательно,

$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2(x_1^2 + x_2^2). \tag{12}$$

Это и есть оценки, которые мы имели в виду получить. Соотношения (12) являются точными оценками. Именно, в точке, где $\tilde{x}_2 = 0$, Φ совпадает с левой частью этих соотношений; в точке, где $\tilde{x}_1 = 0$, Φ равно правой части.

В точках единичной окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ оценки (12) принимают особенно простой вид:

$$\lambda_1 \leqslant \Phi \leqslant \lambda_2.$$

Таким образом, характеристические числа являются границами изменения численных значений квадратичной формы на единичной окружности.

141. Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то согласно (12) форма Φ положительна во всех точках (кроме начала координат, где она равна нулю). Такая форма называется *положительно определенной.* Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, форма называется *отрицательно определенной*; в этом случае форма имеет во всех точках отрицательные значения (не считая начала координат). Если λ_1, λ_2 — числа разных знаков, то форма в некоторых точках положительна, в некоторых — отрицательна (в некоторых обращается в нуль). Такая форма называется *знакопеременной.*

Пример. Форма $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ является положительно определенной, так как $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$; имеем $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

На единичной окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ эта форма изменяется в границах

$$\frac{1}{2} \leqslant x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leqslant \frac{3}{2}.$$

142. Теперь мы перейдем к рассмотрению квадратичной формы от трех переменных:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \quad (13)$$

Ввиду полной аналогии с предыдущим, мы лишь кратко отметим основные положения, касающиеся таких форм.

Мы полагаем, что в пространстве введена система координат с началом O и ортогональным базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (из единичных векторов). Тогда x_1, x_2, x_3 можно рассматривать как координаты некоторой точки $M(x_1; x_2; x_3)$ или вектора $\boldsymbol{x} = \overline{OM}$. Величина Φ есть значение формы в точке $M(x_1; x_2; x_3)$. В дальнейшем будем употреблять только ортогональные базисы (из единичных векторов).

Данную форму напишем в следующем виде:

$$\Phi = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3),$$

считая $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

Вместе с данной формой рассмотрим линейное преобразование $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, которое в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеет координатное представление

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Матрица этого преобразования

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей данной квадратичной формы в данном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Форма Φ теперь может быть записана так:

$$\Phi = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x};$$

здесь $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ — скалярное произведение вектора $\boldsymbol{x}$ на вектор $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$ — единичные попарно перпендикулярные собственные векторы преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, имеющие собственные числа λ_1, λ_2, λ_3. Если перейти к базису $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_3$, то матрица квадратичной формы (как матрица преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$) станет диагональной:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Одновременно сама форма получит канонический вид:

$$\Phi = \lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + \lambda_3\tilde{x}_3^2.$$

Числа λ_1, λ_2, λ_3 суть корни характеристического уравнения матрицы A; их называют *характеристическими числами* данной квадратичной формы.

Направления собственных векторов преобразования $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ называются *главными направлениями* квадратичной формы. Если вектор имеет собственное число $\lambda\ (= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то определяемое им главное направление называется соответствующим этому числу λ.

Когда мы приводим квадратичную форму к каноническому виду, то при этом мы переходим к ортогональному базису, векторы которого имеют главные направления данной формы. Способ разыскания такого базиса изложен в § 24.

Если числа λ_1, λ_2, λ_3 — все разные, то квадратичная форма имеет точно три главных направления; они перпендикулярны друг к другу. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, то числу λ_1 соответствует одно определенное главное направление; условимся называть его первым. Числу $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$ в этом случае соответствует бесконечное множество главных направлений; именно, любое направление, перпендикулярное к первому главному направлению, будет главным направлением и будет соответствовать числу $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то любое направление в пространстве является главным направлением формы; такая квадратичная форма в любом ортогональном базисе имеет канонический вид $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2$, где $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Все утверждения, которые мы сейчас высказали, непосредственно вытекают из результатов § 24.

Пример. Дана квадратичная форма

$$\Phi = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$$

привести ее к каноническому виду.

Решение. Матрица данной формы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

совпадает с матрицей линейного преобразования, которое рассмотрено в первом примере n° 132. Имеем $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. В качестве нового базиса следует взять векторы $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$, которые найдены в указанном примере. В базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ квадратичная форма имеет канонический вид:

$$\Phi = 3\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_3^2.$$

143. Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду прежде всего находят приложение к аналитической геометрии.

Займемся задачей упрощения уравнения кривой второго порядка. Будем, как принято в аналитической геометрии, векторы ортогонального базиса на плоскости обозначать через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, а координаты текущей точки — буквами x, y. Чтобы не усложнять дело лишними деталями, рассмотрим уравнение второй степени без линейных членов

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = H. \qquad (14)$$

Такое уравнение определяет кривую второго порядка, центр которой находится в начале координат (см. § 2). Задача о приведении уравнения (14) к каноническому виду полностью сводится к задаче о приведении к каноническому виду квадратичной формы старших членов, которая стоит в левой части этого уравнения. Главные направления этой формы называются главными направлениями данной кривой.

Пусть A — матрица квадратичной формы старших членов, λ_1, λ_2 — корни ее характеристического уравнения, $\tilde{\boldsymbol{i}}$, $\tilde{\boldsymbol{j}}$ — перпендикулярные друг к другу единичные векторы главных направлений, отвечающие числам λ_1, λ_2. Тогда, если мы, не меняя начала координат, перейдем к базису $\tilde{\boldsymbol{i}}$, $\tilde{\boldsymbol{j}}$, то в новых координатах уравнение кривой примет канонический вид:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 = H.$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9;$$

определить вид кривой.

Решение. Квадратичная форма старших членов данного уравнения совпадает с квадратичной формой, которая была рассмотрена в примере n° 136. Имеем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. Искомый базис $\tilde{\boldsymbol{i}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\tilde{\boldsymbol{j}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Переход к новой системе координат достигается поворотом осей на угол $\alpha = -45°$; соответствующие формулы преобразования координат имеют вид

$$x = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}}.$$

Каноническое уравнение кривой

$$\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 = 9,$$

или

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{1} = 1.$$

Кривая является эллипсом с полуосями 3 и 1.

144. Рассмотрим в пространственных координатах с ортогональным базисом $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=H. \qquad (15)$$

Уравнение (15) определяет поверхность второго порядка с центром в начале координат.

Данное уравнение приводится к каноническому виду одновременно с квадратичной формой старших членов, которая стоит в его левой части. Чтобы привести уравнение (15) к каноническому виду, нужно (не меняя начала координат) перейти к ортогональному базису $\tilde{\boldsymbol{i}}, \tilde{\boldsymbol{j}}, \tilde{\boldsymbol{k}}$, векторы которого имеют главные направления поверхности. При этом главными направлениями поверхности называются главные направления квадратичной формы старших членов ее уравнения.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz=18;$$

определить вид поверхности.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы старших членов:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей линейного преобразования, которое рассматривалось в первом примере п° 132. Имеем $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$. Искомый базис

$$\tilde{\boldsymbol{i}}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{j}}=\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}.$$

Формулы преобразования координат при переходе к этому базису

$$x=\frac{1}{3}\tilde{x}+\frac{2}{3}\tilde{y}-\frac{2}{3}\tilde{z},$$

$$y=\frac{2}{3}\tilde{x}+\frac{1}{3}\tilde{y}+\frac{2}{3}\tilde{z},$$

$$z=\frac{2}{3}\tilde{x}-\frac{2}{3}\tilde{y}-\frac{1}{3}\tilde{z}.$$

Каноническое уравнение данной поверхности

$$3\tilde{x}^2+6\tilde{y}^2+9\tilde{z}^2=18,$$

или

$$\frac{\tilde{x}^2}{6}+\frac{\tilde{y}^2}{3}+\frac{\tilde{z}^2}{2}=1.$$

Данная поверхность является эллипсоидом с полуосями $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$.

145. Если расположение базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ нас не интересует, то каноническое уравнение поверхности можно написать сразу, зная λ_1, λ_2, λ_3. Числа λ_1, λ_2, λ_3 суть корни характеристического уравнения, которое является уравнением третьей степени. Нахождение корней такого уравнения может оказаться довольно хлопотливым. Между тем очень часто требуется определить только вид поверхности, а для этого достаточно знать лишь знаки чисел λ_1, λ_2, λ_3. Знаки корней характеристического уравнения можно установить весьма просто при помощи известного правила Декарта; об этом см. п°49.

Николай Владимирович Ефимов

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ

Москва, 1967 г., 160 стр. с илл

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*

Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 28/VI 1967 г. Подписано к печати 14/IX 1967 г. Бумага 84×108/32, тип. № 2. Физ. печ. л. 5. Условн. печ. л. 8,40. Уч.-изд. л. 7,48. Тираж 100 000 экз. Т-10077. Цена 26 коп. Заказ № 1797.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Цена 26 коп.